



Problèmes inverses pour l'environnement : outils, méthodes et applications

Maëlle Nodet

► To cite this version:

Maëlle Nodet. Problèmes inverses pour l'environnement : outils, méthodes et applications. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Grenoble, 2013. tel-00930102

HAL Id: tel-00930102

<https://theses.hal.science/tel-00930102>

Submitted on 14 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Problèmes inverses pour l'environnement : outils, méthodes et applications

Maëlle Nodet

28 novembre 2013



Jury :

Mark Asch (rapporteur)

Université de Picardie (Amiens)

Jacques Blum

Université de Nice Sophia Antipolis

Georges-Henri Cottet

Université Joseph Fourier et IUF (Grenoble)

Gérald Desroziers

Météo-France (Toulouse)

Bijan Mohammadi

Université de Montpellier 2

Nancy Nichols (rapporteur)

Université de Reading (Royaume-Uni)

Catherine Ritz

CNRS, LGGE (Grenoble)

Enrique Zuazua (rapporteur)

BCAM Bilbao (Espagne)

Table des matières

Introduction	4
Liste des travaux	8
1 Assimilation de données pour l'environnement	11
1.1 Méthodes d'assimilation de données	13
1.1.1 Introduction	13
1.1.2 Présentation des méthodes variationnelles	14
1.1.3 Algorithmes variationnels en pratique	17
1.1.4 Méthodes séquentielles : le filtre de Kalman	20
1.1.5 Méthodes de filtrage d'ensemble	22
1.2 Quelques problèmes inverses en glaciologie	25
1.2.1 Modèles d'écoulement de glace	25
1.2.2 Introduction à la modélisation inverse en glaciologie	32
1.2.3 Etude des conditions basales du glacier Variegated	36
1.2.4 Contribution du Groenland à la montée du niveau des mers	42
1.2.5 Paléoclimatologie : reconstruction d'un scénario climatique	49
1.2.6 Initialisation d'un modèle grande échelle par filtrage ETKF	53
1.2.7 Initialisation grande échelle par méthode variationnelle	56
1.3 Assimilation de données lagrangiennes en océanographie	60
1.3.1 Présentation du problème	60
1.3.2 Assimilation lagrangienne dans un contexte opérationnel	61
1.4 Assimilation de séquences d'images	67
1.4.1 Séquences d'images : intérêts et difficultés	67
1.4.2 Rappel des travaux antérieurs	70
1.4.3 Travaux en cours	73
1.5 Bibliographie du chapitre 1	78
2 Méthodes pour les problèmes inverses et l'analyse de sensibilité	87
2.1 Réduction de dimension	89
2.1.1 Présentation	89
2.1.2 Borne certifiée pour l'équation de Burgers avec viscosité	92

2.1.3	Borne d'erreur orientée-sortie	97
2.2	Analyse de sensibilité globale	101
2.2.1	Présentation	101
2.2.2	Utilisation de métamodèles pour estimer les indices de Sobol : quelle perte d'information ?	103
2.2.3	Etude asymptotique de l'estimation d'indices de Sobol	106
2.3	Algorithme du nudging direct et rétrograde (BFN)	114
2.3.1	Présentation	114
2.3.2	Résultats théoriques négatifs	115
2.3.3	Amélioration de l'algorithme	117
2.4	Etude expérimentale de la méthode HUM pour l'équation des ondes	121
2.4.1	Présentation	121
2.4.2	Méthode numérique	122
2.4.3	Etude expérimentale de l'opérateur HUM	123
2.5	Bibliographie du chapitre 2	127

Perspectives

131

Introduction

Ce mémoire résume les travaux que j'ai effectués depuis mon arrivée à Grenoble, dans l'équipe MOISE (INRIA – LJK), en septembre 2006.

Le thème général de mes travaux est l'assimilation de données, et plus généralement les problèmes inverses et des questions liées (comme le contrôle et l'analyse de sensibilité). J'attache également une grande importance aux applications, avec un goût particulièrement marqué pour l'environnement. En effet, je pense que, dans le domaine des problèmes inverses, la théorie et les applications n'ont pas de sens l'une sans les autres.

Mon travail est donc un incessant aller-retour entre les aspects méthodologiques et théoriques et les applications numériques et pratiques. J'ai ainsi élargi mon spectre de recherche depuis ma thèse en allant à la fois plus loin vers les applications et plus loin dans les méthodes, au gré de collaborations grenobloises ou niçoises. On pourrait se demander pourquoi mes collaborations internationales sont peu développées, au regard des standards universitaires actuels. Mais ce serait oublier que ma motivation profonde est l'environnement, et qu'à ce titre je rechigne à faire chaque année le tour de la planète en avion, et je préfère les collaborations qui se mènent en train, ou à vélo...

J'ai choisi une organisation de ce mémoire en deux chapitres : les aspects plutôt applicatifs d'une part, les aspects plutôt méthodologiques d'autre part. Il existe bien sûr des recouvrements entre les deux aspects. Essentiellement, dans la première partie on part du problème concret (glaciologie, océanographie, images) et on étend les méthodes classiques d'assimilation à des modèles complexes, tandis que dans la deuxième partie on investigate des questions plus amont, que l'on étudie sur des modèles très simples. Chaque partie comprend un résumé des résultats obtenus et une bibliographie propre. Des perspectives sont proposées en fin de document. Je donne un aperçu du contenu de ces deux parties ci-dessous.

Tout au long du document, les références entre crochets numérotées sont mes propres travaux, en gris pour les documents en lien avec la thèse, en couleur pour les travaux postérieurs à la thèse.

Aperçu du contenu du mémoire

Dans la première partie, je présente les aspects applicatifs de mon travail. Cette partie comprend peu de théorèmes, mais beaucoup de développements numériques et algorithmiques pour des problèmes concrets. Mes directions de recherche appliquées sont les suivantes :

Glaciologie. Quelques années après mon arrivée à Grenoble, j'ai eu la chance de rencontrer les glaciologues de l'équipe EDGe¹ du LGGE (Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, Grenoble), en particulier Catherine Ritz, Olivier Gagliardini, Fabien Gillet-Chaulet et Gaël Durand. Ainsi une fructueuse collaboration s'est mise en place, autour de plusieurs questions glaciologiques actuelles. Par exemple, une question (très à la mode en ce moment en raison du problème grandissant du changement climatique) est celle de la contribution de l'Antarctique et du Groenland au changement de niveau des mers. Cette question est un problème d'assimilation de données typique : comment initialiser les modèles (en vue de faire des prévisions) grâce aux observations disponibles ? D'autres problèmes existent également, avec des échelles de temps (20 ans ou 20 000 ans) et d'espace (un glacier ou tout l'Antarctique) très variées. Ces différentes questions ont mené au co-encadrement de la thèse de Bertrand Bonan (avec Catherine Ritz) et à l'encadrement de plusieurs stagiaires de licence et master. Ces différents travaux sont résumés au paragraphe §1.2.

Assimilation de données lagrangiennes. Cette thématique est dans la droite ligne de ma thèse, où j'ai étudié l'assimilation de positions de flotteurs dérivants dans l'océan. Pendant ma thèse j'ai étudié la faisabilité du problème d'assimilation, avec un modèle d'océan certes réaliste mais dans une configuration très idéalisée. En vue de transmettre la méthode aux modèles opérationnels, nous avons souhaité la généraliser à un modèle plus réaliste, le code NEMO. A mon arrivée à Grenoble, Arthur Vidard (INRIA MOISE) et moi avons donc encadré le post-doc de Claire Chauvin. Son travail consistait à mettre en place l'assimilation lagrangienne de manière plus générale, dans le code d'océan NEMO, dans une configuration plus proche de l'océanographie opérationnelle. Ce travail est résumé dans le paragraphe §1.3.

Assimilation de séquences d'images. Cette thématique existait déjà dans l'équipe MOISE lorsque je suis arrivée, autour du groupe de François-Xavier Le Dimet et Arthur Vidard (avec Innocent Souopgui en thèse et Olivier Titaud en post-doc). Vu le lien étroit entre les données lagrangiennes et les séquences d'images, je m'y suis intéressée tout naturellement. En effet, une séquence d'image, vue à l'œil nu, ressemble très fortement à une collection de traceurs lagrangiens qui se déplacent avec le flot. Certaines méthodes opérationnelles d'assimilation des images reposent d'ailleurs sur le suivi lagrangien de certaines structures. Contrairement à ces méthodes, nous cherchons à mettre en place l'assimilation directe des images, sans recourir à l'usage de pseudo-observations. Nous avons en particulier exploré différents opérateurs d'observation, certains basés sur une décomposition multi-échelle de l'image (ondelettes, curvelettes), d'autres sur les gradients. Nous encadrons avec Arthur Vidard la thèse de Vincent Chabot sur ce sujet, et une nouvelle thèse commencera bientôt. Ces travaux sont résumés au paragraphe §1.4.

1. EDGe : Dynamique de l'Ecoulement et physique de la Déformation du matériau Glace

Dans la deuxième partie, je présente les aspects méthodologiques et théoriques de mon travail. L'idée cette fois est de se pencher sur des questions plus théoriques, et de les étudier avec des modèles plus simples (Burgers, transport, Venturi, ondes, ...).

Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Lorsque Clémentine Prieur est arrivée dans l'équipe MOISE en 2008, nous avons souhaité mettre en place une collaboration sur des sujets mêlant à la fois des intérêts déterministes et stochastiques. Une telle question pour moi était la suivante : étant donné un modèle, avec de nombreux paramètres d'entrée inconnus (modèle de glace ou d'océan par exemple), et un certain nombre d'observations disponibles, comment choisir les paramètres à identifier ? En effet, l'approche conservative consisterait à chercher à identifier tous les paramètres inconnus, mais au prix d'un gros effort de calcul. Il est parfois plus intéressant de cibler le contrôle d'un petit nombre de paramètres bien choisis, car très influents. Cette question est typiquement un problème d'analyse de sensibilité : trouver les paramètres d'entrée d'un modèle qui ont le plus d'influence sur l'incertitude de la sortie. L'analyse de sensibilité globale, et plus particulièrement les indices de Sobol, sont une manière de répondre à cette question. La seule difficulté est que les méthodes numériques de calcul de ces indices impliquent en général la méthode de Monte-Carlo et nécessitent donc un très grand nombre d'appels au modèle. Ceci est bien sûr inenvisageable en pratique, d'où notre deuxième piste de recherche : la réduction de dimension. L'idée est de remplacer le modèle par un méta-modèle approché mais plus rapide. Les questions qui nous ont guidées dans ce travail ont été les suivantes : comment réduire efficacement un modèle ? Comment quantifier l'erreur commise sur les indices de Sobol lorsque l'on remplace le modèle par le métamodèle ? Ces questions ont motivé la thèse d'Alexandre Janon, co-encadrée avec Clémentine Prieur, et les résultats obtenus sont présentés aux paragraphes §2.1 (réduction de dimension) et §2.2 (analyse de sensibilité avec modèles réduits).

Back and Forth Nudging (BFN). Lorsque j'étais en thèse à Nice, Didier Auroux et Jacques Blum ont développé ensemble un nouvel algorithme d'assimilation de données : le Back and Forth Nudging. Le nudging direct consiste à ajouter un terme de rappel aux observations dans les équations du modèle d'évolution. C'est une méthode d'assimilation ancienne et très simple à implémenter, qui donne de bons résultats quand la quantité d'observations est suffisante. Le nudging rétrograde fait la même chose, mais sur l'équation du modèle rétrograde, i.e. en changeant le sens du temps. Le BFN consiste à itérer des étapes de nudging direct et rétrograde. Comme beaucoup de gens à l'époque, j'étais à la fois impressionnée par les résultats positifs obtenus et attérée par l'idée de changer le sens du temps dans les modèles (qui comportent pour la plupart des termes de diffusion). Avec Didier Auroux et Jacques Blum, nous avons donc étudié plus en détail le BFN et proposé des améliorations. Ces résultats sont présentés au paragraphe §2.3.

Méthode HUM numérique. Peu après mon départ de Nice, Gilles Lebeau (Nice) m'a proposé de collaborer sur une question de contrôle pour l'équation des ondes. Pour ce problème bien connu, la méthode HUM donne une condition nécessaire et suffisante à la contrôlabilité de l'équation et donne une expression de l'opérateur de contrôle. Gilles Lebeau avait prouvé au préalable des résultats théoriques sur les propriétés de cet opérateur, et il souhaitait observer numériquement ces propriétés. Nous avons donc fait un travail expérimental, consistant à implémenter une méthode de Galerkin robuste pour résoudre le problème de contrôle, et à l'utiliser pour mettre en évidence les résultats théoriques

prouvés, ainsi qu'émettre de nouvelles conjectures sur le problème. Ce travail, présenté au paragraphe §2.4, est bien sûr plus éloigné de l'assimilation de données en pratique, mais il est néanmoins connexe, au sens où il m'a permis de mieux comprendre certaines difficultés rencontrées en assimilation (non-contrôlabilité, instabilités numériques dues aux ondes, etc.).

Liste des travaux

Les travaux en relation avec la thèse sont en gris, les travaux postérieurs à la thèse sont en couleur. Tous les documents sont disponibles sur ma page web <https://team.inria.fr/moise/maelle/#publi>.

■ Thèse :

- [0] MN, Modélisation mathématique et assimilation de données lagrangiennes pour l'océanographie, thèse Université de Nice Sophia-Antipolis (2005)

■ Articles :

- [1] MN, Variational assimilation of Lagrangian data in oceanography, *Inverse Problems* (2006) 22 245–263
- [2] MN, Regularity results for the Primitive Equations of the ocean. Asymptotic Analysis, IOS Press (2006) 50 3/4, pp. 293–324
- [3] MN, Optimal control of the Primitive Equations of the Ocean with Lagrangian observations. Control Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences (2010) 16 2, pp. 400–419
- [4] G. Lebeau, MN, Experimental Study of the HUM Control Operator for Linear Waves. *Experimental Mathematics*, A K Peters (2010) 19 1, pp. 93–120.
- [5] M. Jay-Allemand, F. Gillet-Chaulet, O. Gagliardini, MN. Investigating changes in basal conditions of Variegated Glacier prior to and during its 1982-1983 surge. *Cryosphere*, Copernicus Publications on behalf of EGU (2011) 5 3, pp. 659-672.
- [6] D. Auroux, J. Blum, MN. Diffusive Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation. *Comptes Rendus Mathématique*, Elsevier (2011) 349 (15-16), pp. 849-854.
- [7] F. Gillet-Chaulet, O. Gagliardini, H. Seddik, MN, G. Durand, C. Ritz, T. Zwinger, R. Greve, D. G. Vaughan. Greenland Ice Sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model. *The Cryosphere*, EGU (2012) 6 6, pp. 1561-1576.
- [8] D. Auroux, MN. The Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation problems : theoretical results on transport equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, EDP Sciences (2012) 18 2, pp. 318–342.

- [9] A. Janon, MN, C. Prieur. Uncertainties assessment in global sensitivity indices estimation from metamodels. International Journal for Uncertainty Quantification, Begell House Publishers (2012).
- [10] A. Janon, MN, C. Prieur. Certified reduced-basis solutions of viscous Burgers equation parametrized by initial and boundary values. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, EDP Sciences (2013) 47 2, pp. 317-348.
- [11] A. Janon, T. Klein, A. Lagnoux-Renaudie, MN, C. Prieur. Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators. ESAIM : Probability and Statistics, EDP Sciences (2013)
- Actes de conférences :
 - [12] MN, J. Blum, Assimilation de données lagrangiennes pour l'océanographie. *Colloque National sur l'Assimilation de Données, Toulouse* (2006)
 - [13] MN, Assimilation of Lagrangian Data into an ocean model. Wiley, Special Issue : Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich (2007) pp. 1026503-1026504, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.
 - [14] MN, G. Lebeau. Experimental study of the HUM control operator for waves. PICO'10 V International Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization (2010) Cartagena, Spain.
 - [15] A. Janon, MN, C. Prieur. Certified metamodels for sensitivity indices estimation. SMAI 2011 5e Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles (2011) Guidel, France. EDP Sciences, Congrès National de Mathématiques Appliquées et Industrielles, 35, pp. 234-238 (2012) ESAIM Proceedings.
 - [16] MN. Introduction to Data Assimilation. EFIDIR Spring School (2011) Les Houches, Chamonix, France.
 - [17] MN, B. Bonan, O. Ozenda, C. Ritz. Data assimilation in glaciology. Advanced Data Assimilation for Geosciences (2012) Les Houches, France.
 - [18] A. Janon, T. Klein, A. Lagnoux, MN, C. Prieur. Normalité asymptotique et efficacité dans l'estimation des indices de Sobol. 44èmes journées de statistique (2012) Bruxelles, Belgium.
 - [19] N. Papadakis, V. Chabot, A. Makris, MN, A. Vidard. Assimilation d'images et de structures. GRETSI Workshop Brest (2013)
 - [20] V. Chabot, MN, A. Vidard, N. Papadakis, Assimilation directe de séquences d'images de traceur passif : application aux équations de Saint-Venant. GRETSI Workshop Brest (2013)
- Travaux soumis :
 - [21] A. Janon, MN, C. Prieur. Goal-oriented error estimation for reduced basis method, with application to certified sensitivity analysis. (2012)
 - [22] B. Bonan, MN, C. Ritz, V. Peyaud. An ETKF approach for initial state and parameter estimation in ice sheet modelling. (2013)

- En préparation :
 - [23] V. Chabot, MN, N. Papadakis, A. Vidard. Assimilation of image structures in the presence of observation error. (2013)
- Rapports de recherche :
 - [24] C. Chauvin, MN, A. Vidard, Pierre-Antoine Bouttier. Assimilation of Lagrangian Data in an operational framework. (2010) pp. 27. RR-7840
 - [25] C. Chauvin, MN, A. Vidard. Assimilation of Lagrangian Data in NEMOVAR. (2010) pp. 15
- Vulgarisation :
 - [26] MN. De la glace à la mer. Matapli, SMAI (2013) 100

1

Assimilation de données pour l'environnement

Plan du chapitre

1.1	Méthodes d'assimilation de données	13
1.1.1	Introduction	13
	Qu'est-ce que l'assimilation de données ?	13
	Le BLUE	13
1.1.2	Présentation des méthodes variationnelles	14
	Méthode adjointe	14
	Principaux algorithmes variationnels	15
1.1.3	Algorithmes variationnels en pratique	17
	Implémentation effective du modèle adjoint	17
	Non-linéarités	18
	Optimisation numérique	19
	Matrices de covariance	19
1.1.4	Méthodes séquentielles : le filtre de Kalman	20
	Algorithme	21
	Equivalence variationnelle	21
	Non-linéarités	21
1.1.5	Méthodes de filtrage d'ensemble	22
	Algorithme du filtre de Kalman d'ensemble	22
	Inflation et localisation	23
	Ensemble Transform Kalman filter (ETKF)	23
1.2	Quelques problèmes inverses en glaciologie	25
1.2.1	Modèles d'écoulement de glace	25
	Processus mis en jeu dans les écoulements de glace	25
	Notations	27
	Modèle d'écoulement petite échelle : Full-Stokes	29
	Modèles d'écoulement grande échelle : Shallow-Ice, Shallow-Shelf	30
1.2.2	Introduction à la modélisation inverse en glaciologie	32
	Initialisation des modèles pour le problème du niveau des mers	32
	Observations des calottes et des glaciers	34
	Paléoclimatologie	35

	Etat de l'art des méthodes inverses en glaciologie	35
1.2.3	Etude des conditions basales du glacier Variegated	36
	Introduction	36
	Observations et modèle	37
	Méthode inverse	39
	Résultats	41
1.2.4	Contribution du Groenland à la montée du niveau des mers	42
	Introduction	42
	Modèle et données	43
	Méthodes	45
	Résultats	47
1.2.5	Paléoclimatologie : reconstruction d'un scénario climatique	49
	Présentation du problème	49
	Modèle et méthode adjointe	50
	Résultats numériques	51
1.2.6	Initialisation d'un modèle grande échelle par filtrage ETKF	53
	Présentation	53
	Méthodes	54
	Résultats numériques	55
1.2.7	Initialisation grande échelle par méthode variationnelle	56
	Modèles et configuration	56
	Expériences jumelles	56
1.3	Assimilation de données lagrangiennes en océanographie	60
1.3.1	Présentation du problème	60
	Les données lagrangiennes	60
	Rappel des travaux antérieurs	60
1.3.2	Assimilation lagrangienne dans un contexte opérationnel	61
	Le système opérationnel NEMOVAR	61
	Opérateur d'observation pour les flotteurs lagrangiens	61
	Quelques résultats numériques	63
1.4	Assimilation de séquences d'images	67
1.4.1	Séquences d'images : intérêts et difficultés	67
1.4.2	Rappel des travaux antérieurs	70
	Pseudo-observations	70
	Assimilation directe	71
1.4.3	Travaux en cours	73
	Opérateurs d'observation pour les images basés sur les gradients	73
	Validation avec des données parfaites	73
	Assimilation d'images en présence de bruit	74
1.5	Bibliographie du chapitre 1	78

1.1 Méthodes d'assimilation de données

Dans ce paragraphe, on présente les principales méthodes d'assimilation de données qui seront utilisées dans la suite du chapitre. Les documents cités sont référencés dans la bibliographie du chapitre, à la page 78.

1.1.1 Introduction

Qu'est-ce que l'assimilation de données ?

L'assimilation de données est la “science des compromis fructueux” : c'est l'ensemble des méthodes qui permettent de combiner de manière optimale (dans un sens à définir) les informations disponibles sur un système : équations mathématiques (décrivant le modèle physique) ; observations (mesures physiques de la réalité) ; statistiques d'erreurs (erreurs d'observation, du modèle...). Ces informations sont souvent hétérogènes en nature, en quantité et en qualité.

L'assimilation de données a été introduite pour le problème d'estimation de la condition initiale en météorologie. Actuellement, ses domaines d'application sont très nombreux (météorologie toujours, mais aussi océanographie, sismique et prospection pétrolière, fusion nucléaire, médecine, glaciologie, agronomie, bâtiment, etc.). De la même façon, on ne se contente plus d'estimer la condition initiale d'un système, mais on recherche aussi de nombreux autres paramètres (conditions aux limites, forçages, paramètres numériques, paramètres des lois physiques, forme et domaine, etc.).

Dans tous les cas, l'idée est de résoudre un problème inverse posé sur un système physique dont une partie des paramètres d'entrée sont inconnus et dont les sorties sont (partiellement, indirectement) observées. Ce type de problème inverse présente en général les caractéristiques suivantes : les systèmes considérés sont complexes ; les observations sont parfois indirectes, partielles (en espace et/ou en temps), entachées d'erreurs ; le problème est souvent mal posé (par exemple : pas assez d'observations ou observations contradictoires).

Le BLUE

Il existe essentiellement deux grandes classes d'assimilation de données. L'une est basée sur l'estimation statistique optimale, et est le fondement des méthodes de filtrage de Kalman. L'autre est basée sur la théorie du contrôle optimal, et donne les méthodes variationnelles. Sous certaines hypothèses restrictives ces deux méthodes sont équivalentes, comme on va le voir ici brièvement.

On considère le problème inverse suivant : estimer $\mathbf{x}^t \in \mathbb{R}^n$ connaissant des observations $\mathbf{y}^o \in \mathbb{R}^m$, telles que

$$\mathbf{y}^o = \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon}^o$$

où \mathbf{H} est l'opérateur d'observation (linéaire) et $\boldsymbol{\epsilon}^o$ est le vecteur d'erreurs d'observations, supposées sans biais (ie d'espérance nulle $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^o) = 0$), de matrice de covariances connue

$\mathbf{R} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^o \boldsymbol{\epsilon}^{oT})$. On suppose aussi qu'on dispose d'une ébauche \mathbf{x}^b :

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon}^b$$

où l'erreur d'ébauche est supposée sans biais, de matrice de covariance connue $\mathbf{P}^b = \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{bT})$ et décorrélée des erreurs d'observations. On cherche alors le BLUE (Best Linear Unbiased Estimator), estimateur linéaire sans biais de variance minimum, ie on cherche \mathbf{x}^a tel que l'estimation soit :

- linéaire : $\mathbf{x}^a = \mathbf{L}\mathbf{y}^o$;
- sans biais : $E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}) = 0$, autrement dit $\mathbf{L}\mathbf{H} = \mathbf{I}$;
- de variance $\text{Tr}(\mathbf{P}^a)$ minimale.

où \mathbf{P}^a est la matrice des erreurs d'analyse $\boldsymbol{\epsilon}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t$. La solution à ce problème est donnée par la formule

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{K}(\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x}^b)$$

où \mathbf{K} est la matrice de gain de Kalman :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P}^{b-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}^b \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^b \mathbf{H}^T)^{-1}$$

Dans ce cas, l'erreur d'analyse a pour matrice de covariance

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}^b$$

On obtient la même estimation si on cherche le minimiseur $\hat{\mathbf{x}}$ de la fonction coût suivante :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{P}^{b-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}^o)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}^o) \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{P}^{b-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}^o\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \\ &= J^b(\mathbf{x}) + J^o(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Les méthodes de filtrage consistent alors à calculer directement la matrice de gain de Kalman, tandis que les méthodes variationnelles consistent à résoudre ce dernier problème de minimisation, grâce à des outils d'optimisation. On donnera plus de détails sur tout ceci dans les paragraphes qui suivent.

1.1.2 Présentation des méthodes variationnelles

Les méthodes variationnelles résolvent le problème inverse en minimisant directement la fonction coût, en général par une méthode de descente de gradient. Le calcul du gradient est fait par la méthode adjointe, qui vient de la théorie du contrôle optimal des EDP (Lions, 1968). On rappelle brièvement ci-dessous de quoi il s'agit.

Méthode adjointe

La méthode adjointe (Lions, 1968) a été introduite pour le problème du contrôle de la condition initiale en météorologie (Le Dimet, 1982; Le Dimet and Talagrand, 1986). On rappelle formellement de quoi il s'agit ci-dessous. La fonction inconnue est l'état du système (température, pression, vents, humidité) à l'instant initial, noté U . Le vecteur

d'état $X(t)$ vérifie alors un système d'équations aux dérivées partielles que l'on appelle le modèle :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = M(X), & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ X(t=0) = U \end{cases}$$

où l'on a explicité uniquement la dérivée en temps. Les opérateurs différentiels en espace sur le domaine Ω ainsi que les conditions aux limites sont contenus dans M . On suppose également que l'on dispose d'observations de l'état $X(t)$:

$$Y^o = HX + \epsilon^o$$

où Y^o vit sur un espace Ω^o que l'on munit (pour simplifier l'écriture) de la norme et du produit scalaire L^2 . On cherche donc à minimiser la fonction coût suivante, qui mesure l'écart aux observations :

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \|HX - Y^o\|^2 dt$$

La minimisation de J requiert son gradient. On commence par exprimer la dérivée de J en U dans la direction u :

$$\hat{J}[U](u) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(U + \alpha u) - J(U)}{\alpha} = \int_0^T (\hat{X}, H^T(HX - Y)) dt$$

où \hat{X} est la dérivée directionnelle de X en U dans la direction u

$$\hat{X} = \hat{X}[U](u) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{X(U + \alpha u) - X(U)}{\alpha}$$

On sait que \hat{X} vérifie l'équation dite du *modèle linéaire tangent* :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{X}}{dt} = \left[\frac{\partial M}{\partial X} \right] \hat{X} \\ \hat{X}(t=0) = u \end{cases}$$

On introduit ensuite l'équation (rétrograde) du *modèle adjoint* :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial M}{\partial X} \right]^T P = H^T(HX - Y) \\ P(t=T) = 0 \end{cases}$$

qui permet d'exprimer facilement le gradient de J :

$$\hat{J}[U](u) = \int_0^T \left(\hat{X}, \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial M}{\partial X} \right]^T P \right) = -(u, P(0)) = (\nabla J_U, u) \Rightarrow \nabla J_U = -P(0)$$

Cette méthode tout à fait générique peut s'appliquer également dans d'autres cas : modèle discret en temps comme en espace, avec d'autres contrôles que la condition initiale, en tenant compte des covariances d'erreurs, etc.

Principaux algorithmes variationnels

En assimilation variationnelle, la matrice de covariance d'erreur d'ébauche est classiquement notée \mathbf{B} plutôt que \mathbf{P}^b , on utilisera donc cette notation dans ce paragraphe.

4D-Var. L'algorithme de référence est le 4D-Var. Sa formulation classique est celle du contrôle de la condition initiale \mathbf{x} , connaissant des observations distribuées en temps \mathbf{y}_i^o , comme dans le problème de contrôle optimal décrit précédemment. La fonction coût du 4D-Var est la suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{H}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i^o\|_{\mathbf{R}_i^{-1}}^2$$

Le premier terme est le terme d'ébauche, il joue un double rôle. D'abord il contient les informations a priori dont on dispose sur le système, à savoir une *ébauche* \mathbf{x}^b de l'estimation recherchée et les statistiques de covariance d'erreur via la matrice \mathbf{B} . Ensuite mathématiquement il joue un rôle régularisant, car en général le problème de minimiser seul l'écart aux observations est mal posé (non-unicité, pas de continuité par rapport aux données).

Le deuxième terme, qui contient l'écart aux données, est appelé le terme d'observation. La somme se fait sur les indices i qui représentent divers instants d'observations, auxquels sont associés un vecteur d'observations \mathbf{y}_i^o , ainsi qu'une certaine connaissance des statistiques d'erreurs d'observations, via les matrices \mathbf{R}_i . L'opérateur linéaire \mathbf{H}_i fait le lien entre la variable d'état du modèle \mathbf{x}_i à l'instant i et le vecteur d'observations \mathbf{y}_i^o . On est donc ici en train de chercher la condition initiale d'un modèle, connaissant des observations distribuées sur une fenêtre temporelle donnée. L'état du système aux instants d'observation, \mathbf{x}_i , est lié à la condition initiale \mathbf{x} par le modèle (linéaire) d'évolution en temps :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}_{0 \rightarrow i} \mathbf{x} = \mathbf{M}_{i-1 \rightarrow i} \mathbf{M}_{i-2 \rightarrow i-1} \dots \mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} \mathbf{M}_{0 \rightarrow 1} \mathbf{x} = \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}$$

où on a noté pour simplifier $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k-1 \rightarrow k}$ une étape en temps du modèle envoyant \mathbf{x}_{k-1} sur \mathbf{x}_k . On peut ainsi réécrire la fonction coût en explicitant la dépendance en \mathbf{x} (on rappelle que \mathbf{x} est l'état initial, autrement dit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$) :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x} - \mathbf{y}_i^o\|_{\mathbf{R}_i^{-1}}^2$$

On peut alors exprimer le gradient de J :

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_1^T \dots \mathbf{M}_{i-1}^T \mathbf{M}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i^o - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{x})$$

que l'on réécrit traditionnellement en utilisant les vecteurs innovations \mathbf{d}_i :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^o - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{x}$$

de la manière suivante :

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \mathbf{M}_1^T [\mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{d}_1 + \mathbf{M}_2^T [\mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{M}_n^T \mathbf{H}_n^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_n]]$$

Cette factorisation montre que l'on peut calculer le gradient de J avec une intégration du modèle direct (pour les vecteurs \mathbf{d}_i) et une intégration du modèle adjoint.

Ceci est à la base de l'algorithme du 4D-Var qui procède ainsi, à partir d'un point de départ pour \mathbf{x} : calculer J et ∇J , faire une étape d'une méthode de descente pour minimiser J , mettre à jour \mathbf{x} et recommencer.

3D-Var et 3D-FGAT. Lorsque le modèle ne dépend pas du temps, l'algorithme du 3D-Var procède de la même façon pour minimiser la fonction coût :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}^o\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2, \text{ avec } \nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$$

avec $\mathbf{d} = \mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x}$. Cet algorithme est également utilisé avec des modèles d'évolution, en supposant que toutes les observations sont effectuées au temps initial. La fonction coût s'écrit alors

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}_i^o\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2$$

Comme il est peu satisfaisant de comparer une observation au temps i avec l'état du modèle au temps initial, il existe une variante appelée le 3D-FGAT (first guess at appropriate time), qui s'écrit ainsi :

1. Calcul des vecteurs innovations grâce au modèle direct :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^o - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{x}$$

2. Calcul de J :

$$J = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{d}_i\|_{\mathbf{R}_i^{-1}}^2$$

(notez qu'on retrouve alors la fonction coût du 4D-Var)

3. Calcul de ∇J grâce à l'adjoint \mathbf{H}^T de l'opérateur d'observation :

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{d}_i$$

Le 3D-FGAT est donc une variante du 4D-Var, dans lequel on remplace les opérateurs adjoints \mathbf{M}_i^T par l'identité. Ceci simplifie grandement la mise en pratique puisqu'alors seul l'adjoint de l'opérateur d'observation est requis.

1.1.3 Algorithmes variationnels en pratique

La mise en œuvre pratique des méthodes variationnelles requiert de nombreux ingrédients, qui font actuellement tous l'objet de recherches actives. On va passer rapidement en revue les principaux.

Implémentation effective du modèle adjoint

L'obtention du modèle adjoint, en vue d'obtenir le gradient, peut se faire de deux façons. La première méthode, que j'appellerai *adjoint continu* consiste à écrire les équations adjointes continues (comme on l'a fait ci-dessus) et ensuite à les discrétiser. La deuxième façon de faire, que j'appellerai *adjoint discret*, consiste à écrire d'abord le modèle direct discret et à calculer ensuite l'adjoint du code discret.

Ces deux méthodes ne sont pas équivalentes, notamment lorsque les schémas numériques utilisés ne sont pas symétriques. Ainsi, l'adjoint continu ne sera pas exactement l'opérateur adjoint du modèle direct, alors que l'adjoint discret lui le sera bien. La "bonne" manière

de procéder est donc celle de l'adjoint discret, qui donne bien le gradient de la fonction coût discrète.

Cependant, le calcul et l'implémentation de l'adjoint discret sont complexes et fastidieux, et il peut arriver que par commodité on choisisse l'adjoint continu, au prix d'un gradient approché.

Il existe néanmoins des outils qui permettent d'automatiser l'écriture du code adjoint, dits outils de différentiation automatique, comme le logiciel Tapenade (2002); Hascoet and Pascual (2013). Ces outils sont puissants, en perpétuelle évolution, et peuvent désormais dériver de gros codes de calcul en fortran. Il faut mentionner cependant que ces outils ne s'utilisent pas complètement en boîte noire et nécessitent pas mal de travail de préparation du code direct. On se réfèrera à Giering and Kaminski (1998); Griewank and Walther (2008) pour des détails sur la différentiation automatique de codes.

Non-linéarités

Les algorithmes classiques sont écrits pour des modèles et des opérateurs d'observation linéaires, mais en pratique les opérateurs sont rarement linéaires. Pour distinguer du cas quadratique on utilise les notations \mathcal{J} pour la fonction coût et \mathcal{M}_i et \mathcal{H}_i pour les opérateurs modèle et d'observation non linéaires. Dans ce cas les hypothèses du BLUE ne sont plus satisfaites, on perd donc l'optimalité des algorithmes et l'équivalence variationnelle/filtrage. On peut néanmoins continuer à utiliser les algorithmes précédents, la fonction coût s'écrivant :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathcal{H}_i \mathcal{M}_i \mathcal{M}_{i-1} \dots \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1 \mathbf{x} - \mathbf{y}_i^o\|_{\mathbf{R}_i^{-1}}^2$$

En pratique on utilise deux types d'algorithmes pour minimiser \mathcal{J} :

1. soit on minimise directement la fonctionnelle non quadratique, avec des méthodes de type Quasi-Newton, en utilisant le gradient

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_1^T \dots \mathbf{M}_{i-1}^T \mathbf{M}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i^o - \mathcal{H}_i \mathcal{M}_i \mathcal{M}_{i-1} \dots \mathcal{M}_1 \mathbf{x})$$

où les opérateurs adjoints sont les transposés des opérateurs linéarisés (communément appelés opérateurs tangents dans la littérature d'assimilation) ;

2. soit on utilise des algorithmes dits incrémentaux qui consistent à supposer \mathbf{x} proche d'une référence \mathbf{x}^r , $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r + \delta \mathbf{x}$, et à linéariser pour obtenir une fonctionnelle quadratique approchant \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}_{\text{quad}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\delta \mathbf{x}\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{x}\|_{\mathbf{R}_i^{-1}}^2$$

où $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^o - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{x}^r$ et les opérateurs \mathbf{H} et \mathbf{M} sont les linéarisés de \mathcal{H} et \mathcal{M} autour de la trajectoire de référence \mathbf{x}^r . On procède alors de manière itérative : minimisation de $\mathcal{J}_{\text{quad}}$, le minimiseur devient la nouvelle référence \mathbf{x}^r , linéarisation de \mathcal{H} et \mathcal{M} autour de \mathbf{x}^r , nouvelle fonction quadratique, etc.

Optimisation numérique

Une fois que le modèle discret et son gradient (grâce à l'adjoint) sont disponibles, on procède à la minimisation itérative de la fonction coût grâce à des algorithmes de minimisation numérique. Le livre de Nocedal and Wright (1999) présente les méthodes actuelles, c'est notre référence pour ce paragraphe, mais il existe de très nombreux papiers de recherche sur le sujet. Les méthodes qui sont utilisées en assimilation de données (météo, océano et glacio) sont des variantes de la méthode de Newton, essentiellement les méthodes de Quasi-Newton et de Gauss-Newton. La méthode de Quasi-Newton consiste à remplacer l'opérateur hessien qui intervient dans la formule de Newton par une approximation (méthode BFGS, de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). En grande dimension on se contente même d'une approximation de rang réduit (méthode L-BFGS, autrement dit BFGS à mémoire limitée). La méthode de Gauss-Newton est l'algorithme incrémental présenté juste au-dessus, qui consiste à linéariser les opérateurs non linéaires \mathcal{H}_i et \mathcal{M}_i , à minimiser la fonctionnelle quadratique obtenue, puis à remettre à jour la trajectoire de référence et à nouveau linéariser, et à itérer le processus jusqu'à convergence. Sous certaines conditions (que l'on maîtrise rarement en pratique) l'algorithme converge vers un minimum de la fonction \mathcal{J} .

Matrices de covariance

Les matrices de covariance d'erreurs d'ébauche \mathbf{B} et d'observation \mathbf{R} sont nécessaires pour pouvoir mettre les algorithmes en pratique. Comme les dimensions de ces matrices sont très grandes, elles ne sont jamais stockées ni définies sous forme matricielle, on implémente en général l'opérateur qui effectue le produit de ces matrices par un vecteur. Leur rôle est très important bien sûr, comme on peut le voir sur la formule du BLUE :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x}^b)$$

L'incrément d'analyse $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$ est dans l'image de la matrice \mathbf{B} ! La modélisation de ces matrices est délicate et fait l'objet de recherches actives, qui sont plus abouties pour la matrice \mathbf{B} que pour la matrice \mathbf{R} (souvent choisie diagonale). On cite brièvement ci-dessous diverses façons de faire.

On rappelle que si $\boldsymbol{\epsilon}^b$ représente l'erreur d'ébauche (avec $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^b) = 0$), alors $\mathbf{B} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{bT})$. Si on note $B_{i,j} = \mathbb{E}(\epsilon_i^b \epsilon_j^b)$ ses coefficients, on peut écrire classiquement

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C} \boldsymbol{\Sigma}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice diagonale des écarts-types $\sqrt{B_{i,i}}$, et \mathbf{C} est la matrice des corrélations

$$C_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{\sqrt{B_{i,i}} \sqrt{B_{j,j}}}$$

La matrice des écarts-types $\boldsymbol{\Sigma}$ peut être estimée par des statistiques sur des états du modèle, elle n'a que n coefficients (alors que \mathbf{B} en a n^2), où n est la dimension du vecteur d'état. Une première méthode naïve consiste à dire que les fonctions de corrélation sont des gaussiennes dépendant de la distance entre deux points :

$$C_{i,j} = c_1 \exp\left(-\frac{d_{i,j}}{c_2}\right)$$

où c_1 et c_2 sont des coefficients de normalisation et $d_{i,j}$ représente la distance entre le point repéré par l'indice i dans la grille et celui repéré par l'indice j , de sorte que l'influence du point i sur le point j décroît avec la distance entre ces points. La méthode de l'opérateur de diffusion (Weaver and Courtier, 2001) améliore cette idée, en déformant les gaussiennes pour suivre les frontières du domaine, ou le flot. Ceci est réalisé grâce à un opérateur de diffusion (dont les solutions sont justement des gaussiennes déformées).

Le problème de la méthode précédente est qu'elle produit des corrélations spatiales entre deux points de grille différents pour une même variable physique (température, vitesses, etc.), mais pas de corrélations entre deux variables physiques différentes. D'autres méthodes permettent de produire des matrices \mathbf{B} multivariées (c'est-à-dire avec des corrélations non nulles entre variables physiques distinctes) : méthode de réduction de dimension, méthode de Monte-Carlo (appelée méthode d'ensemble en assimilation). La méthode de réduction de dimension consiste à se donner une série temporelle d'états du modèle ξ_k suffisamment riche, et à former la matrice \mathbf{X} qui contient en colonnes les ξ_k moins leur moyenne. On effectue ensuite une décomposition en valeurs singulières (ou analyse en composante principales) de la matrice $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{N}\mathbf{\Lambda}\mathbf{N}^T$$

où \mathbf{N} est la matrice des vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres (classées par ordre décroissant). L'idée pour approcher \mathbf{B} est de ne conserver que la partie correspondant aux r premières composantes (appelées aussi EOF pour Empirical Orthogonal Functions en géophysique) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{N}_r^T$$

où \mathbf{N}_r est une matrice comportant r colonnes qui sont les r premières EOF, et $\mathbf{\Lambda}_r$ est une matrice diagonale de taille r par r contenant les r plus grandes valeurs propres. En général, $r < 100$, donc une telle formulation de \mathbf{B} est stockable en mémoire et manipulable aisément.

Une autre façon de produire une matrice \mathbf{B} multivariée est d'utiliser une méthode d'ensemble (Monte-Carlo). Si on dispose d'un ensemble de p états possibles $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$ du système, on peut estimer \mathbf{B} par méthode de Monte-Carlo :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (\mathbf{x}^j - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}^j - \bar{\mathbf{x}})^T$$

où $\bar{\mathbf{x}}$ est la moyenne des \mathbf{x}^j . Comme précédemment, on est ramené à des calculs moins coûteux. Tout le problème est alors de calculer judicieusement les vecteurs \mathbf{x}^j de l'ensemble. On se reportera aux méthodes de filtre d'ensemble pour voir comment calculer ces éléments. En général, p est de l'ordre de 80 à 100, de sorte que \mathbf{B} est élémentaire à calculer. Comme avec la méthode réduite, la matrice \mathbf{B} obtenue est naturellement multivariée.

1.1.4 Méthodes séquentielles : le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman étend, comme le 4D-Var, l'analyse BLUE aux problèmes dépendant du temps. Les notations sont les mêmes que précédemment, à ceci près que le filtre de Kalman inclut naturellement la prise en compte de l'erreur du modèle :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k$$

où η_k est un bruit non biaisé, décorrélié dans le temps, de matrice de covariance \mathbf{Q}_k . Notez que le 4D-Var permet aussi la prise en compte de l'erreur modèle, comme par exemple dans Vidard et al. (2000, 2004); Freitag et al. (2012), mais la mise en œuvre est moins naturelle que pour le filtre de Kalman. Comme pour le 4D-Var et le BLUE, on dispose également d'observations à chaque instant t_k :

$$\mathbf{y}_k^o = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k^o$$

On suppose également que les erreurs d'observation et de modèle sont décorréliées, soit $\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_k^o \eta_l^T) = 0$ pour tous temps t_k, t_l . Comme pour le 4D-Var, le filtre de Kalman suppose que les opérateurs \mathbf{M} et \mathbf{H} sont tous linéaires.

Algorithme

Le filtre de Kalman se décompose en une succession de deux étapes : l'analyse et la prévision. L'étape d'analyse au temps t_k est une simple application du BLUE : à cet instant, on dispose d'une ébauche (qui est la prévision précédente), que l'on note \mathbf{x}_k^f (exposant f pour *forecast*), de matrice de covariance \mathbf{P}_k^f supposée connue. On dispose aussi d'observations selon l'équation précédente. L'analyse BLUE se réécrit donc :

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k^o - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^f), \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T)^{-1}$$

et l'erreur d'analyse a pour matrice de covariance \mathbf{P}_k^a donnée également selon la formule du BLUE :

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f$$

La deuxième étape du filtre de Kalman consiste à propager cette analyse jusqu'au prochain instant d'observation, grâce au modèle, c'est la phase de prévision :

$$\mathbf{x}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{x}_k^a, \quad \mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k$$

Equivalence variationnelle

Sous les hypothèses du filtre de Kalman sur les erreurs et la linéarité des opérateurs, le 4D-Var et le filtre de Kalman sont équivalents. Plus précisément, en l'absence d'erreur de modèle, sur une même fenêtre temporelle $[t_0, t_N]$ avec les mêmes observations et la même ébauche (ie $\mathbf{x}^b = \mathbf{x}_0^f$), l'analyse de Kalman au temps final \mathbf{x}_N^a coïncide avec le minimum de la fonction coût du 4D-Var (propagé jusqu'au temps t_N par le modèle).

Non-linéarités

Comme pour le 4D-Var, en présence de non-linéarités on peut étendre l'algorithme, au prix d'une perte d'optimalité. On perd également l'équivalence variationnelle. Le filtre de Kalman étendu est une adaptation du filtre de base avec les opérateurs non linéaires \mathcal{M}_k et \mathcal{H}_k et leurs linéarisés \mathbf{M}_k et \mathbf{H}_k autour de \mathbf{x}_k^a et \mathbf{x}_k^f . L'analyse s'écrit

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k^o - \mathcal{H}_k \mathbf{x}_k^f), \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T)^{-1}, \quad \mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f$$

et la phase de prévision devient

$$\mathbf{x}_{k+1}^f = \mathcal{M}_{k+1} \mathbf{x}_k^a, \quad \mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k$$

1.1.5 Méthodes de filtrage d'ensemble

Le filtre de Kalman, même dans sa version étendue, est rarement utilisable tel quel en géosciences, car les dimensions des matrices mises en jeu sont bien trop grandes. Rappelons en effet que si la dimension de l'espace d'état est n alors les matrices \mathbf{P} et \mathbf{K} sont de tailles $n \times n$. Dans les applications réalistes (météo, océano), n peut être de l'ordre du million, de sorte que ces matrices ne sont pas stockables en pratique. Une méthode empirique a été proposée pour pallier ce problème par Evensen (1994); Burgers et al. (1998) : le filtre de Kalman d'Ensemble. Les justifications théoriques sont encore balbutiantes, on pourra se référer aux travaux de Bocquet (2011) pour une interprétation mathématique solide. Néanmoins, ce filtre donne d'assez bon résultats en pratique et il est assez facile à implémenter, il est donc très largement utilisé, et il en existe de très nombreuses variantes.

Algorithme du filtre de Kalman d'ensemble

L'idée est de remplacer le vecteur d'état et sa matrice de covariance par un *ensemble* de vecteurs $\mathbf{x}_k^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_e$, dont les premiers moments fournissent une estimation du vecteur d'état et la matrice de covariance :

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{x}_k^{(i)}, \quad \mathbf{P}_k = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\mathbf{x}_k^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k)^T$$

L'étape de prévision consiste à propager chacun des membres de l'ensemble :

$$\mathbf{x}_k^{f(i)} = \mathcal{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{a(i)})$$

comme pour la prévision du filtre de Kalman standard. On a ensuite

$$\bar{\mathbf{x}}_k^f = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{x}_k^{f(i)}, \quad \mathbf{P}_k^f = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\mathbf{x}_k^{f(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k^f)(\mathbf{x}_k^{f(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k^f)^T$$

Pour l'analyse, on commence par créer un jeu d'observations pour chaque élément de l'ensemble :

$$\mathbf{y}_k^{o(i)} = \mathbf{y}_k^o + \boldsymbol{\epsilon}_k^{o(i)}, \quad i = 1, \dots, N_e$$

où le bruit $\boldsymbol{\epsilon}_k^{o(i)}$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{N_e} \boldsymbol{\epsilon}_k^{o(i)} = 0, \quad \mathbf{R}_k = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\boldsymbol{\epsilon}_k^{o(i)})(\boldsymbol{\epsilon}_k^{o(i)})^T$$

Ensuite la phase d'analyse est similaire à celle du filtre standard, pour chaque élément de l'ensemble :

$$\mathbf{x}_k^{a(i)} = \mathbf{x}_k^{f(i)} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k^{o(i)} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f(i)}), \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T)^{-1}$$

Le vecteur analysé proprement dit et sa matrice de covariance d'erreur sont alors donnés par les deux premiers moments de l'ensemble des analyses :

$$\bar{\mathbf{x}}_k^a = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{x}_k^{a(i)}, \quad \mathbf{P}_k^a = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\mathbf{x}_k^{a(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k^a)(\mathbf{x}_k^{a(i)} - \bar{\mathbf{x}}_k^a)^T$$

Inflation et localisation

Le filtre de Kalman d'ensemble est bien connu pour être sensible aux erreurs d'échantillonnage, due à la taille réduite de l'ensemble. En effet, en pratique $N_e < 100$ alors que $n = 10^4$ à 10^6 . Cela conduit à deux défauts identifiés, pour lesquels deux types de remèdes ont été proposés.

1. La sous-estimation des variances. Pour y remédier, on procède en général à une inflation artificielle de l'ensemble (Pham et al., 1996; Anderson and Anderson, 1999). Autrement dit on éloigne artificiellement les membres de l'ensemble de leur moyenne :

$$\mathbf{x}_k^{f(i)} = \overline{\mathbf{x}}_k^f + \rho \left(\mathbf{x}_k^{f(i)} - \overline{\mathbf{x}}_k^f \right), \text{ avec } \rho > 1$$

D'autres façons d'appliquer une inflation existent, notamment aux niveaux des observations. Ce problème est due à la formulation du filtre en elle-même, car Bocquet (2011) a montré qu'une autre formulation tenant compte de la taille finie du filtre (EnKF-N) permet de supprimer le recours à l'inflation (en fait, cette formulation de taille finie introduit naturellement l'inflation optimale requise).

2. L'apparition de corrélations longue-distance artificielles. Ce problème est résolu par un outil appelé localisation (Hamill et al., 2001; Houtekamer and Mitchell, 2001; Ott et al., 2004). Là aussi il en existe de très nombreuses formulations, l'idée générale étant de supprimer les corrélations entre des points de grille trop éloignés, par exemple en convolant les matrices de covariances avec des fonctions localisantes.

Ensemble Transform Kalman filter (ETKF)

L'ETKF a été introduit par Bishop et al. (2001), il s'agit d'une réécriture particulière de la phase d'analyse du filtre de Kalman d'ensemble en utilisant un changement de variable (d'où le term *transform*), similaire à celle développée par Pham (1996); Pham et al. (1998); Pham (2001) pour le filtre SEIK. On décrit ici la version du filtre donnée par Hunt et al. (2007). On commence par introduire la matrice \mathbf{X}^f des perturbations de l'ensemble des prévisions \mathbf{x}^f : les colonnes de \mathbf{X}^f sont les perturbations $[\mathbf{x}^{f(1)} - \overline{\mathbf{x}}^f, \dots, \mathbf{x}^{f(N_e)} - \overline{\mathbf{x}}^f]$. Ensuite, on va chercher la matrice \mathbf{P}^a comme une transformation par la formule :

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{X}^f \tilde{\mathbf{P}}^a \mathbf{X}^{fT}$$

où $\tilde{\mathbf{P}}^a$ est une matrice carrée de taille N_e . On définit également les observations des prévisions par :

$$\mathbf{y}^{f(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{x}^{f(1)}), \dots, \mathbf{y}^{f(N_e)} = \mathcal{H}(\mathbf{x}^{f(N_e)})$$

et on définit $\overline{\mathbf{y}}^f$ la moyenne de cet ensemble et \mathbf{Y}^f la matrice des perturbations associées.

La phase d'analyse consiste alors à minimiser la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{N_e - 1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^o - \overline{\mathbf{y}}^f - \mathbf{Y}^f \mathbf{w}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_e}$$

On a une formule explicite pour le minimiseur :

$$\mathbf{w}^a = \tilde{\mathbf{P}}^a \mathbf{Y}^{fT} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \overline{\mathbf{y}}^f), \quad \tilde{\mathbf{P}}^a = \left(\mathbf{Y}^{fT} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}^f + (N_e - 1) \mathbf{I} \right)^{-1}$$

Et on a ensuite les vecteurs analysés grâce à leur moyenne et leur matrice de perturbations :

$$\overline{\mathbf{x}^a} = \overline{\mathbf{x}^f} + \mathbf{X}^f \mathbf{w}^a, \quad \mathbf{X}^a = \mathbf{X}^f \left((N_e - 1) \tilde{\mathbf{P}}^a \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette formulation admet également une version avec inflation et localisation, on réfère à Hunt et al. (2007) et à Bonan (2013) pour les détails.

1.2 Quelques problèmes inverses en glaciologie

Dans ce paragraphe, on présente les problèmes de inverses étudiés en collaboration avec les glaciologues du LGGE. Pour commencer on explique les grandes lignes de la modélisation en glaciologie, les principaux modèles et les questions inverses que se posent les glaciologues. Ensuite on résume les publications [5] [7] [17] [22] ainsi que les travaux en cours.

1.2.1 Modèles d'écoulement de glace

Certains éléments de cette partie sont issus de l'article de vulgarisation [26] paru dans le numéro 100 de *Matapli* à l'occasion de l'année 2013 des "Mathématiques pour la planète terre". Pour plus de détails sur la modélisation des calottes, on renvoie à la thèse de B. Bonan (2013).

Processus mis en jeu dans les écoulements de glace

La figure 1.1 présente les différents processus physiques qui interviennent dans la dynamique de l'écoulement de la glace, passons les en revue.

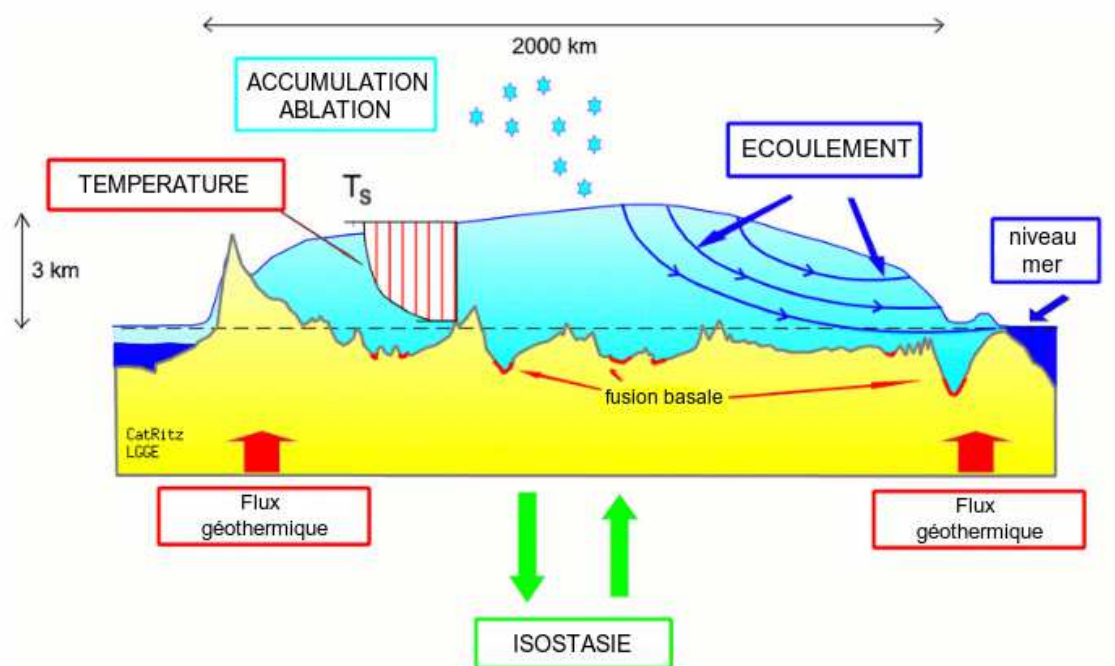


FIGURE 1.1 – Les différents processus physiques intervenant dans la dynamique des écoulement de glace, vus sur un profil en coupe de calotte polaire. *Source : C. Ritz.*

Ecoulement. La première caractéristique de la glace est qu'il s'agit d'un fluide incompressible non-newtonien, qui flue (s'écoule) sous son propre poids. Si on regarde en

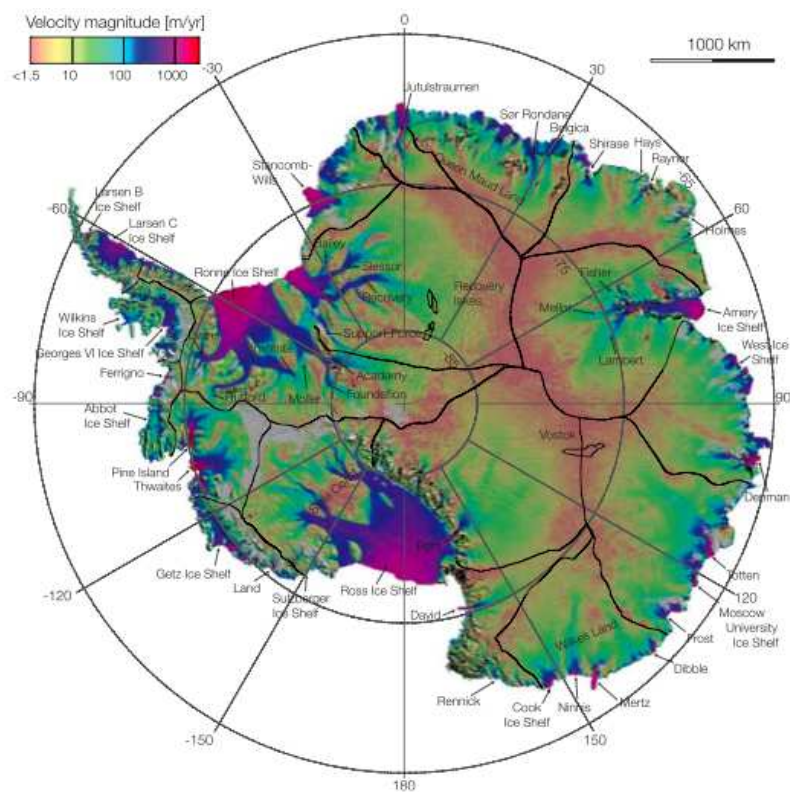


FIGURE 1.2 – Vitesses d'écoulement de la glace en surface, d'après Rignot et al. (2011).

accéléré des photos prises chaque jour d'un glacier de montagne, on verra comme une rivière de glace qui coule¹. Mais contrairement à ce qui se passe pour l'eau liquide, les échelles de temps de l'écoulement sont telles que les effets d'accélération sont négligeables. Le terme "non-newtonien" signifie que la viscosité de la glace dépend non linéairement de la dynamique, elle est donnée par une loi de comportement viscoplastique appelée la loi de Glen, qui modélise la complexité du matériau et de sa capacité à se déformer. La glace est un matériau d'autant plus complexe que ses propriétés physiques sont variables à l'intérieur d'une calotte. En effet, les conditions de température et de pression ne sont pas homogènes dans la glace, ce qui modifie ses propriétés. De plus, la pression et les fusions/regels successifs induisent aussi des modifications de la structure cristalline, et donc des propriétés physiques et mécaniques.

Bilan de masse. Le bilan de masse est la différence entre la glace qui s'accumule (par les précipitations, ou le regel de l'eau en surface, dans les crevasses, ou sous la glace) et la glace qui disparaît (par fusion en surface ou au sol, par vèlage² d'icebergs, ou encore transport par le vent). Estimer ce bilan est un problème très complexe, qui dépend de nombreux phénomènes extérieurs : les conditions météorologiques et la température de surface influent sur la quantité de précipitations neigeuses, sur la fonte, et sur le transport par le vent ; le flux géothermique influe sur la fusion à la base de la glace.

1. <https://www.youtube.com/watch?v=HZaknW8m6tI>

2. vèlage : perte par un glacier de fragments, sous forme d'icebergs

Conditions aux limites à la base. A la base de la glace il peut se passer essentiellement deux choses : soit la glace est très froide et elle adhère au socle rocheux, soit elle glisse sur le sol. Le glissement a lieu pour diverses raisons : lorsque la glace est tempérée il y a à sa base un film d'eau qui permet le glissement sur la roche, elle peut aussi être posée sur un sédiment gorgé d'eau, ou sur des débris rocheux, il peut aussi exister un réseau hydrologique sous-glaciaire (cavités reliées par des ruisseaux, lacs, rivières) sur lequel la glace glisse, etc. En Antarctique et au Groenland, les zones de plus fort glissement sont situées sur les côtes, dans des vallées ressemblant à des canyons ou à des fjords. La figure 1.2 présente la carte des vitesses d'écoulement en surface, et met clairement en évidence de nombreux et gigantesques fleuves de glace, qui s'écoulent à une vitesse supérieure à 10 km/an (14 km/an pour le glacier Jakobshavn au Groenland, qui a produit récemment des épisodes de vélage d'icebergs spectaculaires³). Les calottes se prolongent parfois sur la mer en de gigantesques plates-formes de glace flottantes, les *ice-shelves*.

Bestaire des rétroactions. Une rétroaction, ou *feedback*, a lieu lorsqu'une cause produit un effet qui agit en retour sur la cause du phénomène. L'*instabilité des petites calottes* en est un exemple : lorsque l'altitude de la calotte devient trop basse, sa température de surface augmente, ce qui induit davantage de fonte, et donc une décroissance supplémentaire d'altitude. Le phénomène peut ainsi s'amplifier et la calotte disparaître rapidement.

Mentionnons aussi le phénomène d'isostasie, ou encore rebond post-glaciaire, c'est-à-dire l'enfoncement du socle rocheux sous le poids de la glace. L'enfoncement est de l'ordre du tiers, c'est-à-dire qu'une épaisseur de glace de 3000 m causera l'enfoncement du socle à 1000 m de profondeur, avec un temps de relaxation de l'ordre de 10,000 ans. Ceci induit une rétroaction sur la calotte, puisque l'enfoncement induit une modification de l'altitude de surface, donc de la température de surface et du bilan de masse.

D'autres rétroactions impliquent l'océan : le niveau des mers joue un rôle sur les calottes, par les conditions aux limites au bord latéral (poussée d'Archimède), et les calottes influent sur le niveau des mers. La température de l'océan aux abords et sous les plates-formes flottantes joue également un rôle complexe, et la calotte elle-même influe sur la circulation océanique autour d'elle.

Notations

Les coordonnées spatiales sont x, y pour l'horizontale, z pour la verticale ; l'axe Oz est orienté vers le haut.

La table suivante présente les variables géométriques :

Notation	Description	Unité
$S(x, y, t)$	altitude de la surface	(m)
$H(x, y, t)$	épaisseur de la calotte	(m)
$B(x, y, t)$	altitude de l'extrémité inférieure de la calotte	(m)
$B_{soc}(x, y, t)$	altitude de la surface du socle rocheux	(m)

Les altitudes se mesurent par rapport au niveau de la mer. Par convention, lorsqu'il n'y a pas de glace, on a $B = S = \max(B_{soc}, 0)$. L'épaisseur de glace H est définie par $H = S - B$. La figure 1.3 présente une coupe d'une calotte.

3. <http://www.youtube.com/watch?v=hC3VTgIPoGU>

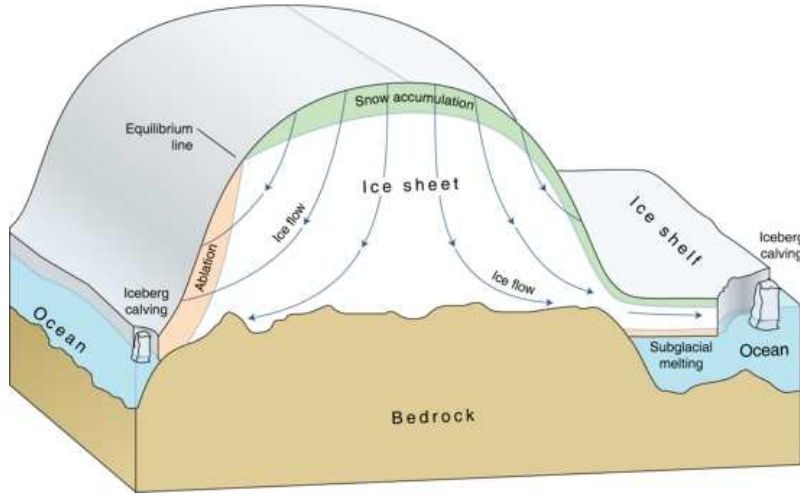


FIGURE 1.3 – Géométrie d'une calotte polaire, avec plateforme flottante. Source <http://www.solcomhouse.com/icecap.htm>.

La table suivante présente les variables de vitesse :

Notation	Description	Unité
$\mathbf{u}(x, y, z, t)$	vitesse d'écoulement de la glace : $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$	$(m.an^{-1})$
$\mathbf{U}(x, y, t)$	vitesse horizontale moyennée sur l'épaisseur : $\mathbf{U} = (U_x, U_y)$	$(m.an^{-1})$
$\mathbf{u}_b(x, y, t)$	vitesse de glissement de la base sur le socle : $\mathbf{u}_b = (u_{b,x}, u_{b,y})$	$(m.an^{-1})$
$\mathbf{u}_s(x, y, t)$	vitesse de la glace en surface : $\mathbf{u}_s = (u_{s,x}, u_{s,y})$	$(m.an^{-1})$

La vitesse moyenne est définie par

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \frac{1}{H(x, y, t)} \int_{B(x, y, t)}^{S(x, y, t)} \mathbf{u}(x, y, z, t) dz$$

et les vitesses à la base et en surface par

$$\mathbf{u}_b(x, y, t) = \mathbf{u}(x, y, B(x, y, t), t), \quad \mathbf{u}_s(x, y, t) = \mathbf{u}(x, y, S(x, y, t), t)$$

La table suivante présente les tenseurs liés à la dynamique et à la loi visqueuse :

Notation	Description	Unité
$\eta(x, y, z, t)$	viscosité de la glace	$(Pa.an^{-1})$
$\bar{\eta}(x, y, t)$	viscosité moyenne ou effective de la colonne de glace	$(Pa.an^{-1})$
$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t)$	tenseur des contraintes	(Pa)
$\boldsymbol{\tau}(x, y, z, t)$	déviateur des contraintes	(Pa)
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(x, y, z, t)$	tenseur des taux de déformation	(an^{-1})
$\sigma_0 = p(x, y, z, t)$	premier invariant du tenseur des contraintes	(Pa)
$\tau(x, y, z, t)$	scission efficace	(Pa)

Les trois tenseurs sont des matrices, par exemple $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ avec $i, j = x, y, z$. Le déviateur des contraintes est donné par $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$, où la pression p est donnée par

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \sigma_0$$

Le tenseur des taux de déformation est défini par

$$\dot{\epsilon}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \text{ avec } i, j = x, y, z$$

La scission efficace est le deuxième invariant du déviateur des contraintes :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}$$

Enfin, la table qui suit présente les divers forçages, conditions aux limites, et paramètres physiques :

Notation	Description	Unité
$\tau_b(x, y, t)$	contrainte basale : $\tau_b = (\tau_{b,x}, \tau_{b,y})$	(Pa)
$\beta(x, y, t)$	coefficient de glissement basal	–
$\dot{f}(x, y, t)$	fusion basale	(m.an ⁻¹)
$\dot{b}(x, y, t)$	bilan de masse en surface, soit accumulation - ablation	(m.an ⁻¹)
$T_s(x, y, t)$	température à la surface de la calotte	°C
$F_{clim}(t)$	forçage climatique de la température en surface	°C
n	exposant de la loi de déformation	–
$\mathcal{B}_{AT,n}$	coefficient de la loi de fluage	(Pa ⁻ⁿ .an ⁻¹)
\mathbf{g}	accélération de la pesanteur (vecteur : $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$)	9.81 m.s ⁻²
ρ_i	densité de la glace	910 kg.m ⁻³
ρ_w	densité de l'eau de mer	1028 kg.m ⁻³

Modèle d'écoulement petite échelle : Full-Stokes

Le modèle Full-Stokes est un modèle d'écoulement petite échelle, à la fois en temps (au mieux 100 à 200 ans) et en espace (les tailles de mailles de discrétisation sont “petites”, inférieures ou de l'ordre du kilomètre). En raison des petites échelles de temps, on néglige le phénomène d'isostasie : le socle rocheux est supposé stationnaire, ainsi que la base de la glace. Ce modèle est généralement utilisé pour étudier des bassins versants (un glacier ou un fleuve de glace, comme dans [5]), mais il a également été utilisé récemment pour la totalité du Groenland dans [7].

Les équations du modèle Full Stokes sont celles d'une fluide visqueux non newtonien incompressible, elles sont données par les équations suivantes. On a d'abord l'équation d'incompressibilité pour la conservation de la masse :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

On a ensuite l'équilibre quasi-statique, autrement dit la loi de Newton dans laquelle on a négligé les effets de l'accélération, compte tenu des échelles des différents termes :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0 \quad (1.2)$$

Et on a enfin la loi de comportement visqueuse de la glace (Duval, 1979; Lliboutry, 1993; Cuffey and Paterson, 2010) :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \frac{1}{\eta} = \mathcal{B}_{AT,n}\tau^{n-1}, \text{ avec } n = 1 \text{ et/ou } 3 \quad (1.3)$$

autrement dit

$$2\dot{\epsilon} = (\mathcal{B}_{AT,1} + \mathcal{B}_{AT,3}\tau^2) \tau \quad (1.4)$$

On a ensuite des conditions aux limites. A la surface de la glace pour régir l'évolution de la surface libre on a :

$$\partial_t S + u_{s,x}\partial_x S + u_{s,y}\partial_y S + u_{s,z} = \dot{b} \quad (1.5)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.6)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unité normal à la surface. A la base de la glace, on a une condition de type glissement :

$$\mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.7)$$

où \mathbf{n} et \mathbf{t} sont les vecteurs unité normal et tangent au socle. Enfin on a des conditions sur le bord latéral, qui varient selon que le front se situe sous le niveau de la mer (supposé en $z = 0$) ou pas :

$$\mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \min(\rho_w g z, 0), \quad \mathbf{t}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.8)$$

Modèles d'écoulement grande échelle : Shallow-Ice, Shallow-Shelf

Il arrive en glaciologie qu'on souhaite considérer de grandes échelles, soit en temps (jusqu'à des centaines de milliers d'années pour les questions de paléoclimatologie), soit en espace (si on considère l'Antarctique, qui s'étend sur des milliers de kilomètres). Dans ce cas, le modèle Full-Stokes est bien trop coûteux pour être résolu numériquement, on procède donc à des approximations de type couche-mince (shallow), comme le passage des équations de Navier-Stokes à celle de Shallow-Water pour les écoulements en eaux peu profondes. On procède donc à une intégration sur la verticale, grâce à l'hypothèse que les échelles verticales sont très inférieures aux échelles horizontales. Mathématiquement, la justification de ces asymptotiques est un problème difficile qui n'a été que peu étudié (Schoof and Hindmarsh, 2010; Bassis, 2010).

En combinant l'équation d'incompressibilité (1.1) avec (1.5) et son pendant à la base :

$$\partial_t B + u_{b,x}\partial_x B + u_{b,y}\partial_y B + u_{b,z} = \dot{f} \quad (1.9)$$

on obtient l'équation de bilan (conservation de la masse) suivante, appelée Shallow-Ice Approximation (SIA) (Hutter, 1983) :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{b} - \dot{f} - \text{div} (H\mathbf{U}) \quad (1.10)$$

où $\text{div} = \partial_x + \partial_y$ est la divergence en 2D.

Pour l'évolution de la base de la glace il existe des modèles plus ou moins compliqué d'isostasie. Les modèles les plus simples traduisent simplement l'enfoncement local égal à un tiers de l'épaisseur de glace (avec un temps de relaxation de 10 000 ans). D'autres modèles plus complexes ajoutent une équation de type plaques pour coupler la glace avec la dynamique de la lithosphère (voir Ritz (1992) pour plus de détails).

La vitesse moyennée sur la verticale se décompose en deux termes :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{def}} + \mathbf{U}_{\text{slid}} \quad (1.11)$$

où \mathbf{U}_{def} est la contribution liée à la déformation (loi de Glen) et \mathbf{U}_{slid} celle liée au glissement.

La vitesse de déformation s'obtient en intégrant sur la verticale l'équation constitutive (1.4), et on obtient, dans le cas où les coefficients $\mathcal{B}_{AT,n}$ ne dépendent pas de z :

$$U_{\text{def},i} = -\rho g \partial_i S \left[\mathcal{B}_{AT,1} \frac{H^2}{3} + (\rho g)^2 (\partial_x S^2 + \partial_y S^2) \mathcal{B}_{AT,3} \frac{H^4}{5} \right], \quad i = x, y \quad (1.12)$$

Pour la vitesse de glissement \mathbf{U}_{slid} , il existe plusieurs approximations. Formellement, l'idée de base est de reprendre les équations de l'équilibre quasi-statique (1.2) et de faire un développement en séries de perturbation. A l'ordre 0, on obtient une approximation SIA pour la vitesse de glissement :

$$\rho g H \nabla S = \boldsymbol{\tau}_b = -\beta \mathbf{U}_{\text{slid}} \quad (1.13)$$

Ici on a supposé que le frottement basal $\boldsymbol{\tau}_b$ est proportionnel à la vitesse de glissement :

$$\boldsymbol{\tau}_b = -\beta \mathbf{U}_{\text{slid}} \quad (1.14)$$

Il existe également des lois de glissement plus complexes liant $\boldsymbol{\tau}_b$ et \mathbf{U}_{slid} (non-linéaires, voir Cuffey and Paterson (2010)), mais on ne les étudiera pas ici.

A l'ordre 1 on obtient pour la vitesse de glissement \mathbf{U}_{slid} une équation elliptique non-linéaire, appelée la Shallow-Shelf Approximation (SSA) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (2\bar{\eta} H (2\partial_x U_{\text{slid},x} + \partial_y U_{\text{slid},y})) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\eta} H (\partial_y U_{\text{slid},x} + \partial_x U_{\text{slid},y})) &= \rho g H \partial_x S - \tau_{b,x} \\ \frac{\partial}{\partial y} (2\bar{\eta} H (2\partial_y U_{\text{slid},y} + \partial_x U_{\text{slid},x})) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\eta} H (\partial_y U_{\text{slid},x} + \partial_x U_{\text{slid},y})) &= \rho g H \partial_y S - \tau_{b,y} \end{cases} \quad (1.15)$$

Les conditions aux limites sont complexes, notamment en 2D. On impose tantôt des conditions aux limites cinématiques (de type vitesse nulle) ou dynamique (lorsqu'un bilan de forces est possible, par exemple dans le cas où le front de glace rencontre la mer). On se référera à Rommelaere (1997); Peyaud (2006) pour les détails et les subtilités de modélisation et d'implémentation.

Un autre point est complexe à modéliser, il s'agit des bilan de masse en surface et à la base \dot{b} et \dot{f} . A la base, \dot{f} mesure la fonte. Des modèles simples prescrivent \dot{f} comme une constante, des modèles plus complexes font intervenir le couplage avec la température (flux géothermique) et/ou l'hydrologie sous-glaciaire. En surface, \dot{b} est lié aux conditions climatiques. En effet, comme on l'a vu plus haut, \dot{b} est la somme entre l'accumulation (les précipitations) et l'ablation (la fonte en particulier, comptée négativement) :

$$\dot{b} = \text{Acc} + \text{Abl} \quad (1.16)$$

Pour des simulations réalistes, il est nécessaire de disposer de bonnes données pour \dot{b} . On peut faire ceci en utilisant un modèle de climat, ou bien des observations. Cette question de modélisation / observation de \dot{b} occupe une communauté entière de glaciologues (Gallée et al., 2011; Lenaerts et al., 2012; Favier et al., 2013; Frezzotti et al., 2013) et ce problème est complexe. Dans nos modèles simplifiés on utilisera une modélisation donnant l'ablation et l'accumulation comme des fonctions explicites de la température en surface :

$$\text{Acc} = \text{Acc}_0 e^{-c_1 T_s} \quad (1.17)$$

$$\text{Abl} = \begin{cases} \text{Abl}_0 \left(\frac{T_s - T_{\text{no melt}}}{T_{\text{no melt}}} \right)^2 & \text{si } T_s > T_{\text{no melt}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

où les paramètres sont fixés par l'expérience des glaciologues. La température de surface T_s dépend de l'altitude de la surface S , de la latitude (axe x pour fixer les idées) et du scénario climatique moyen F_{clim} (température au pôle en $x = 0$, $S = 0$), selon la formule :

$$T_s(x, y, t) = F_{\text{clim}} + \lambda x + \gamma S(x, y, t) \quad (1.19)$$

où λ et γ sont des paramètres connus.

1.2.2 Introduction à la modélisation inverse en glaciologie

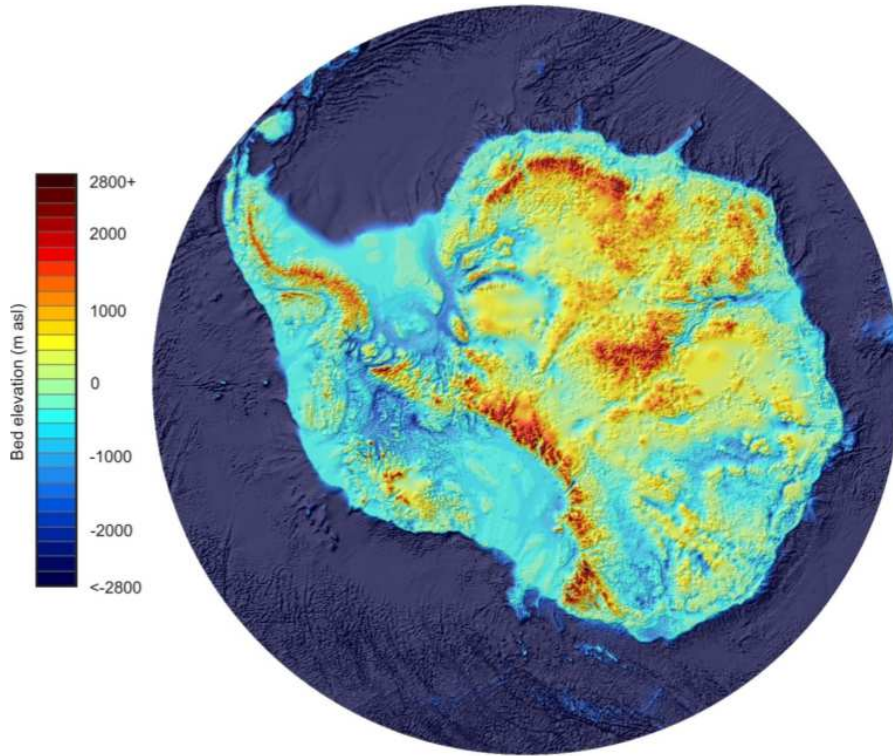


FIGURE 1.4 – Carte de topographie du socle rocheux en Antarctique Bedmap2, obtenue à partir de mesures effectuées par avion en survol au-dessus du continent, d'après Fretwell et al. (2013). Le plus haut sommet culmine à plus de 4500 mètres. A cause du poids de la glace, de nombreuses zones sont situées environ 1000 mètres sous le niveau des mers.

Initialisation des modèles pour le problème du niveau des mers

La contribution des glaciers et calottes polaires au changement de niveau des mers est significative et il est crucial de pouvoir en faire de bonnes prévisions pour le futur (Hanna et al., 2013). Elle est essentiellement la combinaison de deux phénomènes : la modification du bilan de masse en surface (en raison des modifications climatiques et/ou d'altitude de la calotte) d'une part, et l'évacuation de la glace par vêlage d'icebergs dans les fleuves de glace et les plates-formes flottantes d'autre part. Ici on ne considère pas la contribution liée aux modifications de bilan de masse en surface. En effet, ces modifications

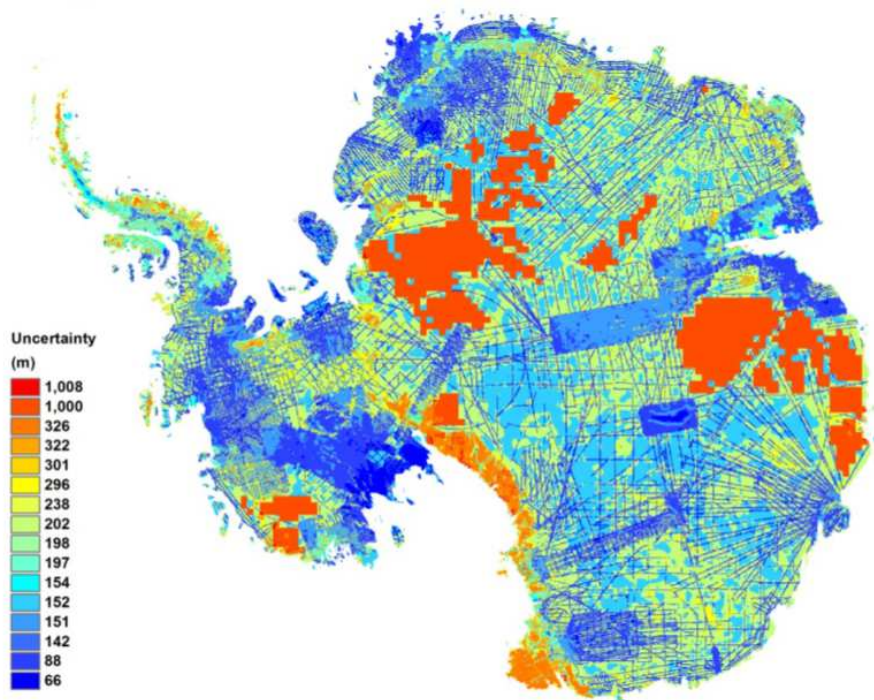


FIGURE 1.5 – Carte des erreurs estimées pour les observations de topographie du socle rocheux en Antarctique, d’après Fretwell et al. (2013). L’incertitude maximale atteint 1000 mètres dans les zones non observées, elle descend autour de 20 mètres au niveau des points de mesure (traces de survol par avion).

sont intrinsèquement liées au changement climatique, sont également très complexes, et font l’objet d’actives recherches par ailleurs⁴.

La perte de masse des calottes polaires par vêlage d’icebergs est contrôlée par un petit nombre de fleuves de glace. On estime par exemple qu’environ 10% de la périphérie de l’Antarctique contrôle 90% de l’évacuation de la glace. La présence ou non de fleuves de glace est intimement liée à la nature des conditions basales, qui permettent ou pas un fort glissement et donc de grandes vitesses d’écoulement. Un autre paramètre essentiel est la géométrie du socle rocheux (altitude et pente), notamment dans les zones côtières. La vitesse de déformation dépend en effet à la fois de l’altitude de surface $S(t, x)$ mais aussi de l’épaisseur de glace $H(t, x)$, et donc de l’altitude du socle $B(t, x) = S - H$. De plus, la profondeur du socle joue également sur l’épaisseur de glace (à altitude de surface fixée), donc sur les conditions de pression à la base de la glace, qui elles-mêmes influent sur la présence ou non d’eau liquide.

Le problème de l’initialisation des modèles consiste donc essentiellement à obtenir une bonne géométrie de la calotte et de bonnes conditions basales, en vue d’initialiser correctement les modèles dévolution. Il s’agit d’un problème inverse, où l’on souhaite estimer ces paramètres sensibles grâce aux observations disponibles (voir ci-dessous).

4. Voir le 5ème rapport du GIEC/IPCC (2013–14) : <http://www.ipcc.ch>

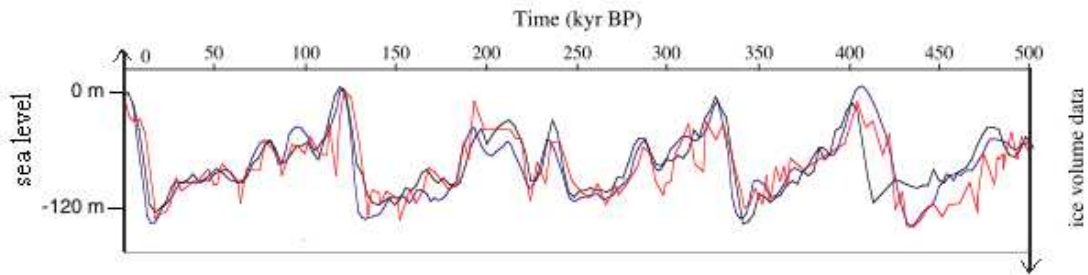


FIGURE 1.6 – Mesures de volume de glace. En noir : mesure de Raymo (1997). En gris : résultats obtenus par différents modèles. Figure extraite de Paillard and Parrenin (2004).

Identification des conditions basales. A une échelle plus locale (glacier ou bassin versant), les glaciologues ont généralement une connaissance plus précise de la géométrie, grâce à des campagnes régionales de mesure. Dans ce cas, l'étude locale se résume essentiellement à l'identification des conditions de frottement à la base, soit en identifiant le coefficient β de nos équations, soit en cherchant à mettre en évidence des lois de frottement plus complexes, comme $\tau_b = -\beta \|\mathbf{U}_{\text{slid}}\|^\alpha \mathbf{U}_{\text{slid}}$, ou encore à étudier plus finement l'hydrologie sous-glaciaire, voir par exemple de Fleurian (2010) et les références incluses, et au paragraphe 1.2.3 le résumé du papier [5].

Observations des calottes et des glaciers

Comme on l'a vu précédemment, les conditions à la base de la glace sont liées à la profondeur et la nature du socle et aux conditions hydrologiques et thermiques.

Les observations pour les conditions de frottement à la base sont très limitées. En effet il est quasiment impossible d'aller faire des mesures sous la glace, sauf dans de rares points de forages profonds où le socle a été atteint. Dans ces cas-là, l'analyse de la glace des carottes renseigne sur ces conditions basales. Les expériences en laboratoire sont assez peu représentatives, il est en effet impossible de restituer la pression équivalente à des milliers de mètres d'épaisseur de glace. L'autre incertitude cruciale est sur la nature du socle : s'agit-il de sédiments, de roche, de débris de roche ? La présence d'eau liquide, déterminante pour le glissement, est aussi liée à des paramètres mal connus comme le flux géothermique. On n'a donc aucune mesure pour la loi de frottement et les coefficients associés.

Pour la profondeur du socle, on dispose d'un nombre limité de mesures, faites par avion⁵. Les observations sont ainsi restreintes à des traces de survol. En ces points de mesure, la précision est d'une vingtaine de mètres. En dehors des points de mesure, des stratégies d'interpolation (en général par krigeage) sont utilisées, mais l'incertitude dans les zones non observées peut aller jusqu'à plusieurs centaines de mètres. De plus, les cartes sont fabriquées par méthode de krigeage, sans tenir compte de l'écoulement de la glace. Les figures 1.4 et 1.5 montrent l'état de l'art des cartes actuelles pour l'Antarctique (Fretwell et al., 2013) : la première est une carte de socle, la deuxième est celle des erreurs estimées.

5. Les mesures satellitales seraient possibles, malheureusement les fréquences radar requises pour observer le socle rocheux sous la glace sont réservées à l'armée. Pour la même raison, les campagnes par avion sont coûteuses et complexes à mettre en place.

On voit clairement sur cette deuxième carte les trace de survol d'avion, où la précision est bonne, et les zones non observées, avec de grandes erreurs possibles. Précisons ici que le relief de l'Antarctique est très chahuté, et tout à fait similaire à nos Alpes, avec des changements brutaux d'altitude et des chaînes de montagnes.

Les autres observations dont on dispose, et qui permettront d'extraire de l'information pour retrouver les paramètres non observés, sont des données de surface, obtenues par satellite : altitude de la surface, vitesse de la glace en surface. L'altitude de surface est observée depuis une vingtaine d'année par satellite (ERS-1, ENVISAT par radar, ICESat par laser). La précision est relativement bonne, en général de l'ordre de 2 mètres, sauf dans les zones montagneuses où la RMS de l'erreur peut monter à 130 mètres (Griggs and Bamber, 2009). Pour la vitesse de la glace on a également une bonne couverture, la résolution spatiale est de l'ordre du kilomètre, comme pour l'altitude de surface. Les erreurs pour la vitesse sont de l'ordre de 1 à 17 mètres par an (Rignot et al., 2011; Joughin et al., 2010).

Paléoclimatologie

Plusieurs questions de modélisation inverse se posent pour la paléoclimatologie (étude des climats passés). Le plus connu du grand public est celui de la datation des carottes de glace, pour lesquelles des avancées récentes au moyen de méthodes inverses ont été obtenues par Lemieux-Dudon et al. (2008, 2010); Buiron et al. (2011). Une autre question qui nous a intéressés est liée à un type très particulier d'observations disponibles : la mesure du volume total des calottes polaires. En effet, ce volume est directement lié au niveau de la mer, qui lui a pu être mesuré sur de gigantesques échelles de temps (centaines de milliers d'années), grâce notamment à des marqueurs biostratigraphiques comme les foraminifères (Paillard and Parrenin, 2004). La figure 1.6 présente de telles données. La question qui se pose alors est la suivante : sachant que la température de surface influence directement l'évolution de la calotte et donc de son volume, peut-on estimer un scénario climatique à partir de mesure de volume de glace ? Avec le modèle simplifié présenté plus haut, cela revient à chercher le paramètre F_{clim} , on étudie un tel problème dans [17].

Etat de l'art des méthodes inverses en glaciologie

L'assimilation de données, essentiellement par méthode de contrôle, est plus récente en glaciologie qu'elle ne l'est en météorologie ou en océanographie. MacAyeal (1992, 1993) a introduit les méthodes de contrôle pour identifier le coefficient de frottement β à la base d'un fleuve de glace (équation de la SSA seule), en utilisant le caractère auto-adjoint de l'équation. Plusieurs applications à divers fleuves de glace ont suivi, par exemple par Rommelaere and MacAyeal (1997); Vieli and Payne (2003). Plus récemment, la méthode adjointe (toujours appelée méthode de contrôle par les glaciologues) a été également mise en œuvre de manière approchée pour un modèle Full-Stokes par Morlighem et al. (2010), en utilisant comme adjoint le modèle lui-même. Ceci est une approximation, car les équations du modèle Full-Stokes ne sont auto-adjointes que lorsque la viscosité est linéaire (loi de Glen avec $n = 1$). L'utilisation d'un adjoint complet est dû à Heimbach and Bugnion (2009), qui ont utilisé un dérivateur automatique pour générer l'adjoint du code SICOPOLIS (Greve, 1997) en vue de faire de l'analyse de sensibilité.

D'autres méthodes inverses ont été introduites récemment. Les méthodes du BLUE et de l'interpolation optimale (OI) ont été utilisées par Arthern and Hindmarsh (2003)

et Berliner et al. (2008). Une méthode due à Chaabane and Jaoua (1999) a également été utilisée par Arthern and Gudmundsson (2010). Cette méthode est appelée méthode de Robin par la suite, elle consiste à minimiser une fonction coût mesurant l'écart aux observations par une descente de gradient sur le coefficient β , en itérant des résolutions du modèle Full-Stokes avec soit une condition de Dirichlet en surface (en imposant les vitesses observées), soit une condition de Neumann homogène (la condition naturelle du modèle). A convergence, la solution vérifie à la fois la condition de Dirichlet et celle de Neumann et produit le champ de β désiré.

La plupart de ces articles s'intéressent à identifier le frottement basal β seul pour des problèmes locaux, à l'échelle d'un glacier, d'un fleuve de glace ou d'un bassin versant. La reconstruction du champ de β pour tout le Groenland est très récente : Arthern and Hindmarsh (2006) par une méthode de type BLUE/OI, [7] par méthode de contrôle et de Robin. De plus, récemment, les glaciologues s'intéressent à reconstruire conjointement le frottement β et le socle B_{soc} , voir Raymond-Pralong and Gudmundsson (2011) (méthode de Bayes, qui est en fait la minimisation directe du BLUE avec un gradient approché) et van Pelt et al. (2013) (simple itération de Picard pour réduire l'écart aux observations). Cette question est plus difficile car on n'a pas toujours unicité : une même vitesse en surface peut être expliquée soit par un B_{soc} bas (grande vitesse de déformation) et peu de glissement ou bien par un socle plus haut et beaucoup de glissement.

Du côté des méthodes inverses pour la paléoclimatologie, pour la question de reconstituer le climat par des observations de volume de glace, on peut citer Bintanja et al. (2004, 2005) qui utilisent une méthode très simple de correction, semblable au nudging (relaxation newtonienne, qui consiste à mettre un terme de rappel aux observations dans le second membre du modèle d'évolution). Pour le problème de datation des carottes, les méthodes inverses sont plus développées, voir par exemple Lemieux-Dudon et al. (2008, 2010).

La suite de ce paragraphe résume les résultats obtenus en glaciologie.

1.2.3 Etude des conditions basales du glacier Variegated

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article [5], étudiant la surge⁶ du glacier Variegated en 1982–83.

Introduction

Le glacier Variegated en Alaska est connu pour surger régulièrement. La première surge relevée a eu lieu en 1905–06, et il y en a eu sept autres jusqu'à la dernière en 2003–04. L'étude présentée dans ce papier s'intéresse à la surge de 1982–83 car elle a été bien observée et l'on dispose d'un bon nombre de mesures. D'après Raymond (1987) on sait que les surges pour les glaciers tempérés⁷ sont dues à des modifications du système hydrologique sous-glaciaire, qui passe d'un système efficace à un inefficace. Un système efficace correspond à un bon drainage de l'eau sous la glace, par de larges canaux, engendrant une faible pression d'eau sous le glacier. Au contraire, un système inefficace n'a pas ces larges canaux mais des petites cavités reliées, donnant lieu à une augmentation de la pression

6. Une *surge glaciaire* est un phénomène brutal et bref qui consiste en une avancée très rapide d'un glacier.

7. Un glacier *tempéré* a sa glace proche du point de fusion.

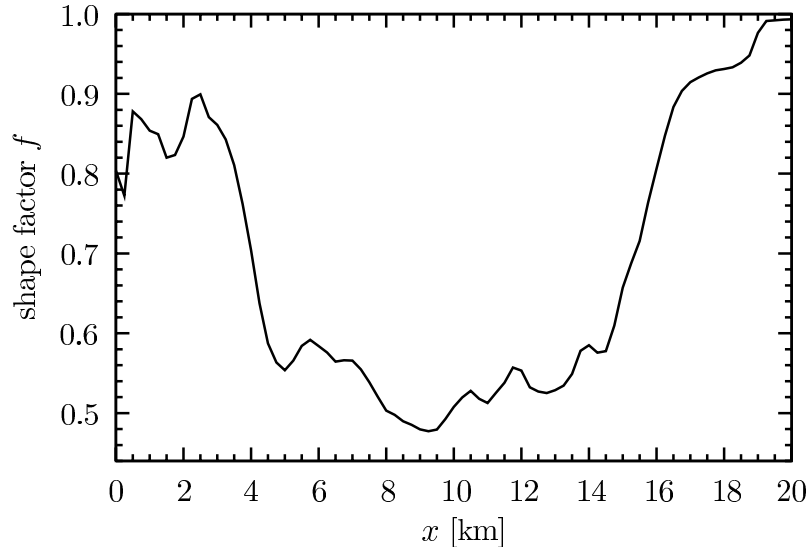


FIGURE 1.7 – Evolution du facteur de forme $f(x)$ le long de la ligne d'écoulement centrale du glacier Variegated pour la topographie de surface $z_s(x)$ de 1973.

sous-glaciaire et des modifications des conditions de glissement. Le passage d'un système efficace à un système inefficace, par l'ouverture et la fermeture des larges canaux, est gouverné par les changements de géométrie (altitude de surface et sa pente) et de température (par l'alternance saisonnière, qui influe sur la fonte). Kamb et al. (1985) ont fait des mesures de vitesse de déformation dans un trou de forage pendant la surge et ont montré que la vitesse du glacier est expliquée à 95% par le glissement à la base. Ce papier s'intéresse donc à l'identification des conditions basales tout au long du glacier, avant et pendant la surge, pour tenter de confirmer cette hypothèse.

Observations et modèle

L'altitude de surface et les vitesses de surface ont été mesurées pendant la décennie 1973–83 par Bindshadler et al. (1977); Kamb et al. (1985); Raymond and Harrison (1988), qui couvre une partie de la phase de latence ainsi que la surge. Les données sont réparties en temps : deux fois par an avant la surge et huit fois pendant les deux ans de la surge. En espace, les données ont été récoltées tous les 250 mètres le long des 20 kilomètres de la ligne centrale du glacier, avec quelques trous (dus notamment à la présence de crevasses).

Comme les mesures sont disponibles seulement selon une ligne d'écoulement, on a utilisé un modèle 2D (x, z) . La base du socle $b(x)$ est fixe, et l'altitude de surface est notée $z_s(x)$, où x est la direction horizontale, avec $x = 0$ au sommet du glacier (à l'altitude d'environ 2000 mètres) et $x = 20$ kilomètres au front, où le glacier termine dans la mer. Le modèle choisi résout les équations Full-Stokes présentées plus haut, avec une particularité liée à l'absence de 3D. En effet, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.2) se lit alors :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} + \mathbf{f}_1 = 0, \text{ pour } x \in [0, 20], z \in [b(x), z_s(x)]$$

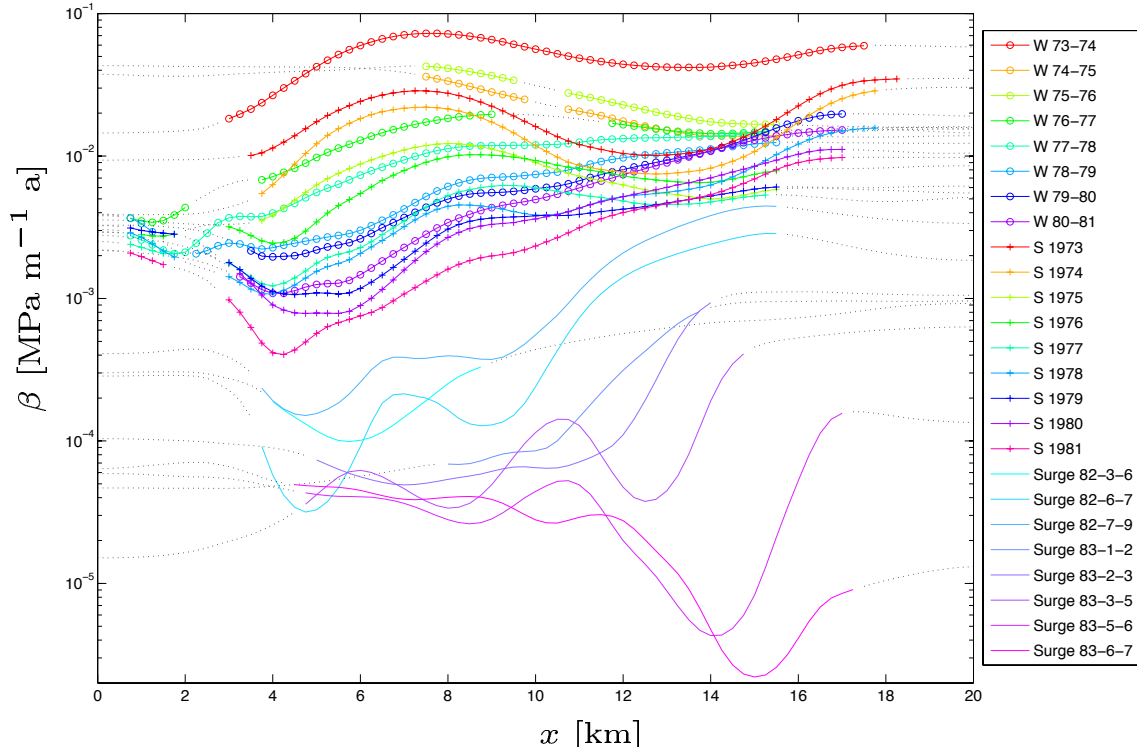


FIGURE 1.8 – Distribution du coefficient de friction basal β identifié par méthode inverse de Robin le long de la ligne d'écoulement centrale, pour les 25 dates d'observations. Les pointillés indiquent l'absence de mesures de vitesse en surface en ces points. Dans la légende, W Y1-Y2 représente les hivers entre l'année Y1 et l'année Y2 ; S Y représente l'été de l'année Y ; Surge Y-M1-M2 représente l'année Y du mois M1 au mois M2.

où \mathbf{f}_1 est un terme qui permet de modéliser les effets latéraux :

$$\mathbf{f}_1 = \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} (1 - f) \mathbf{t}$$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent à la surface et f est appelé le facteur de forme. Si f est égal à 1 on a $\mathbf{f}_1 = 0$, ce qui correspond à un glacier infiniment large. Au contraire si f est petit on modélise des sections étroites. La formule utilisée pour f est la suivante :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{0.8146}{\sqrt{a(x)(z_s(x) - b(x))}} \right)$$

où $a(x)$ représente la forme locale du socle rocheux, cf [5] pour les détails, et la figure 1.7 pour la fonction $f(x)$ obtenue.

Les conditions aux limites en surface et au fond sont les mêmes que précédemment (1.5,1.6,1.7), en particulier on a la loi de frottement à la base (1.7) faisant intervenir le coefficient β que l'on cherche à identifier.

La résolution numérique se fait avec le code éléments finis Elmer/Ice (Gagliardini et al., 2007; Gagliardini and Zwinger, 2008; Gagliardini et al., 2013).

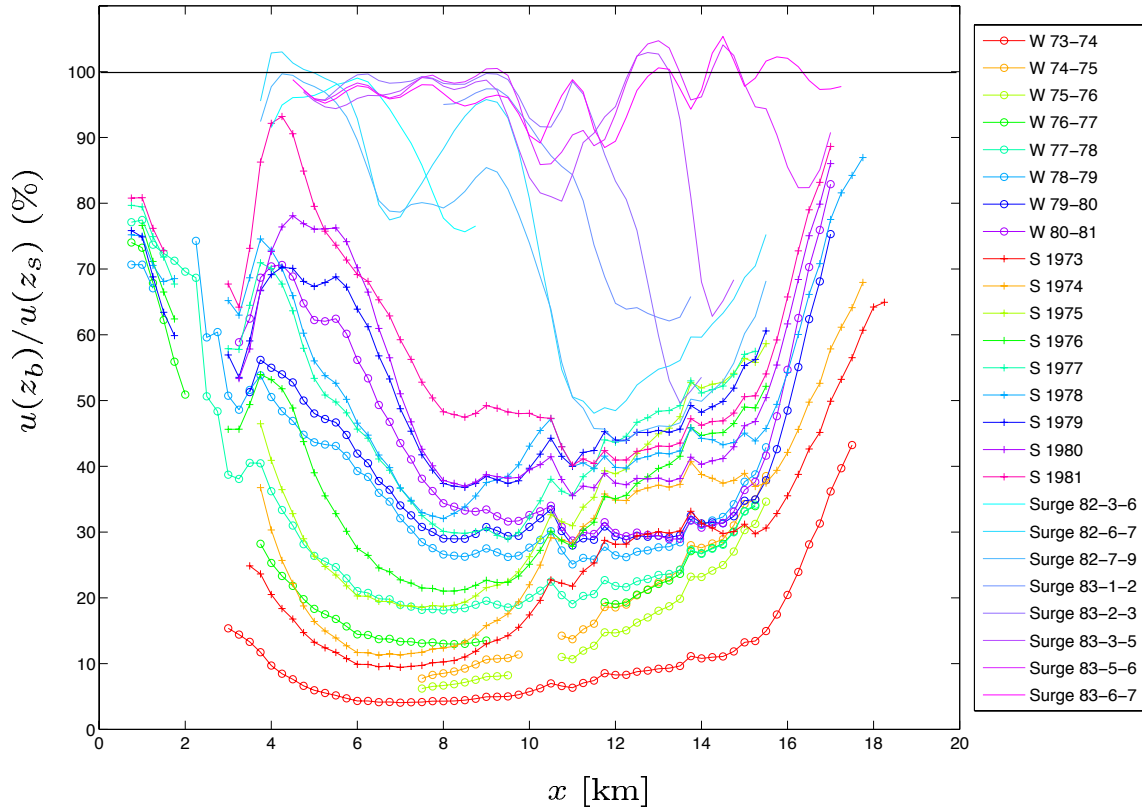


FIGURE 1.9 – Distribution du rapport entre la vitesse basale $u(z_b)$ (donnée par le modèle) et la vitesse en surface $u(z_s)$ le long de la ligne centrale d'écoulement pour les 25 observations. Les résultats ne sont affichés qu'en présence d'observations. La légende est la même que celle de la figure 1.8.

Méthode inverse

La question d'inverser les conditions basales grâce à des observations de surface a été bien étudiée en glaciologie, voir le paragraphe 1.2.2 pour un résumé bibliographique. Dans cet article, on a utilisé la méthode de Robin (Chaabane and Jaoua, 1999; Arthern and Gudmundsson, 2010), que l'on a un peu modifiée pour introduire une régularisation de type Tikhonov. Comme on l'a dit précédemment, le principe de la méthode de Robin est de résoudre alternativement les équations Full-Stokes présentées ci-dessus avec la conditions de Dirichlet :

$$u(z_s) = u^{\text{obs}}$$

puis avec la condition de Neumann (1.6). On définit ensuite la fonction coût qui mesure l'écart en surface entre la solution du problème de Dirichlet \mathbf{u}^D et celle du problème de Neumann \mathbf{u}^N :

$$\mathcal{J}_o = \int_{\Gamma_s} (\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^N - \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

où Γ_s représente la surface de la glace. On peut facilement calculer la dérivée directionnelle de \mathcal{J}_o par rapport à β (dans la direction β') afin de mettre en œuvre une méthode de

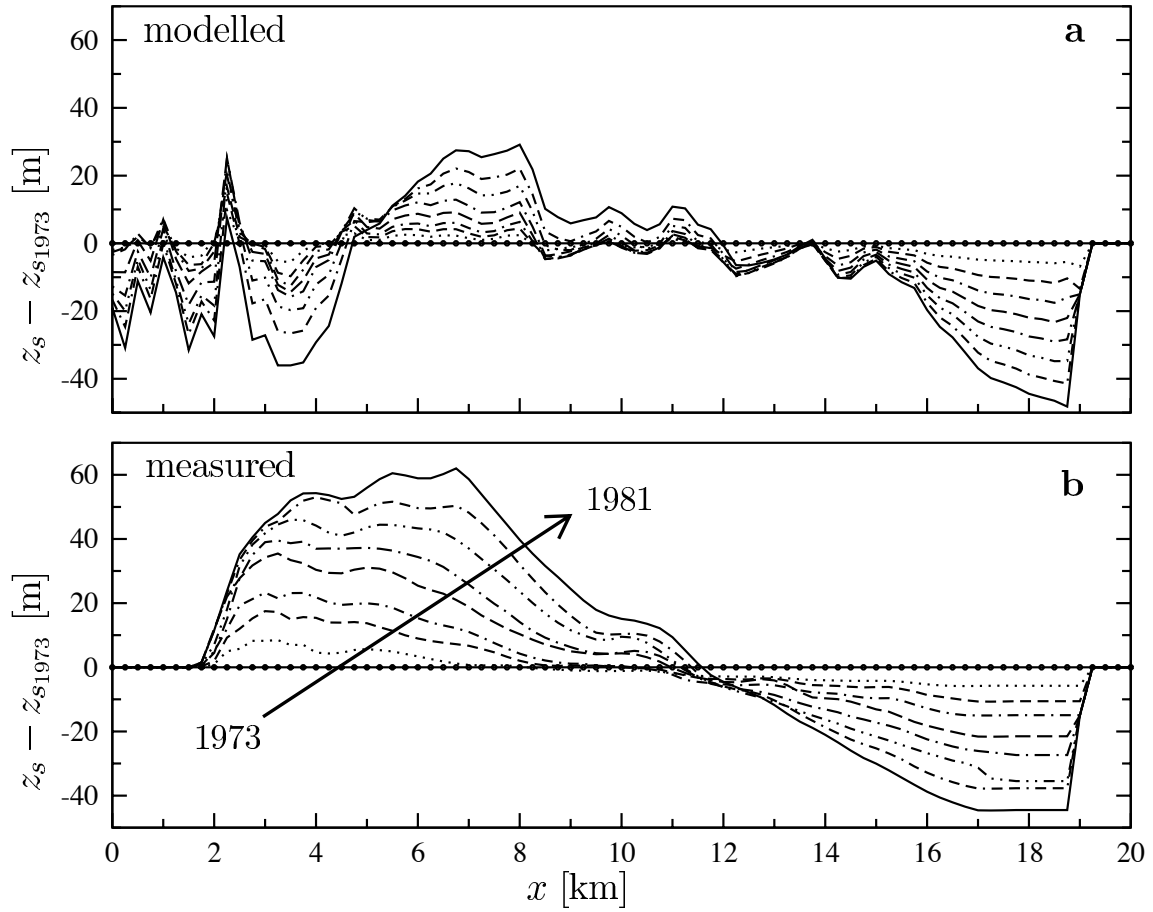


FIGURE 1.10 – Comparaison entre les géométries de surface du modèle **(a)** et mesurées **(b)**, par rapport à la topographie de surface de 1973, pour la phase de latence.

descente :

$$d_{\beta} \mathcal{J}_o(\beta') = \int_{\Gamma_b} \beta' (|\mathbf{u}^D|^2 - |\mathbf{u}^N|^2) d\Gamma$$

où Γ_b est la frontière avec le socle. Il est important de noter ici que cette dérivée n'est exacte que dans le cas d'une rhéologie linéaire (ie loi de Glen avec $n = 1$). Dans le cas réaliste $n = 3$, la dérivée n'est qu'une approximation.

Comme β est positif et varie de plusieurs ordres de grandeur, il est plus logique de changer de variable pour α par

$$\beta = 10^{\alpha}$$

Finalement, le problème est régularisé en ajoutant un terme de régularisation :

$$\mathcal{J}_{\text{tot}}(\alpha) = \mathcal{J}_o(\alpha) + \frac{1}{2} \lambda \bar{u}_{\text{obs}} \mathcal{J}_{\text{reg}}(\alpha), \quad \mathcal{J}_{\text{reg}}(\alpha) = \int_{\Gamma_b} (\partial_x \alpha)^2 d\Gamma$$

Le terme \bar{u}_{obs} est la moyenne des vitesses en surface observées pour le jeu de données considéré, c'est un facteur de normalisation entre les différentes années d'observation. On observe en effet de grandes variations de \bar{u}_{obs} selon les années. Son ajout permet de choisir

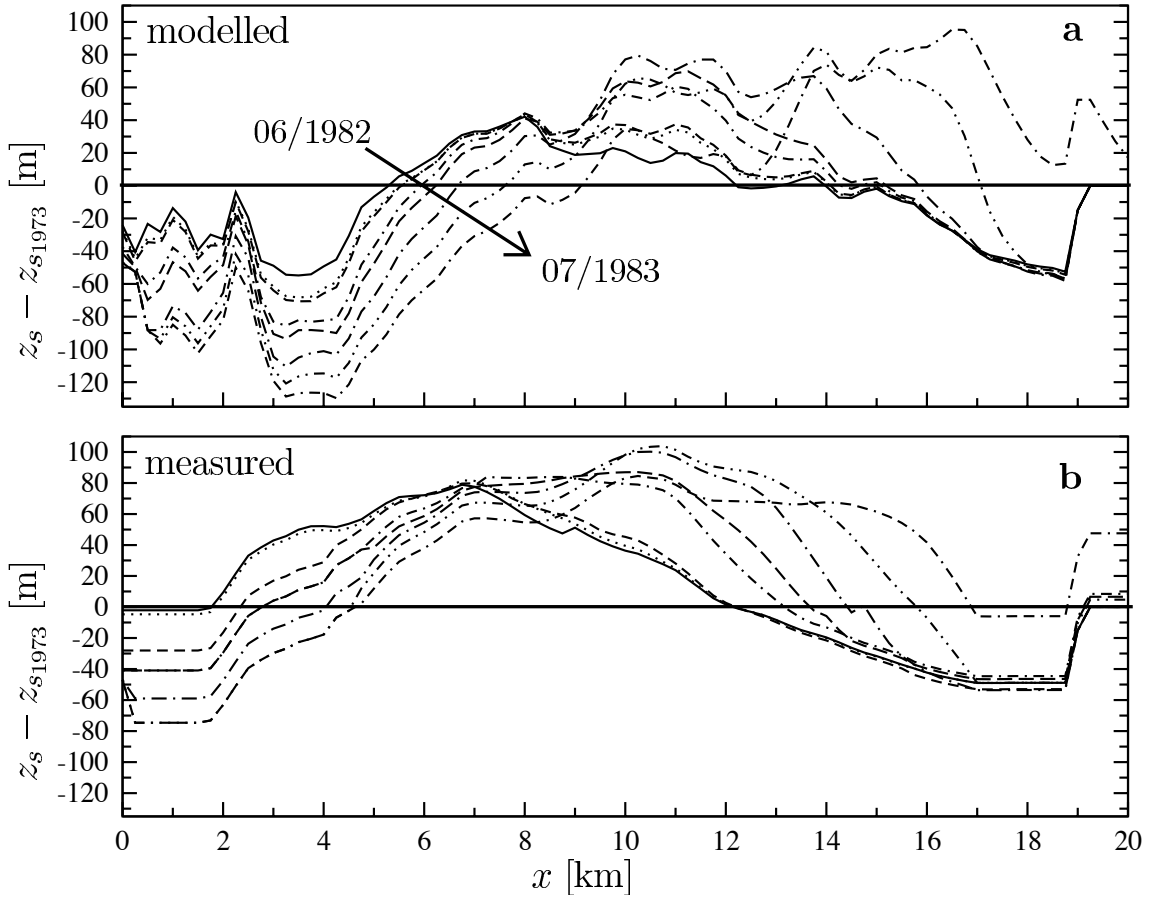


FIGURE 1.11 – Comparaison entre les géométries de surface du modèle (a) et mesurées (b), par rapport à la topographie de surface de 1973, pour la phase de surge.

un poids entre le terme d'observation et le terme de régularisation qui soit indépendant du jeu de données.

Les aspects techniques, comme le choix du paramètre λ , sont décrits dans l'article.

Il faut cependant noter que cette méthode de Robin s'applique à l'équation des vitesses seulement, et non au couplage avec l'évolution de la surface libre : à chaque pas de temps on met en œuvre la méthode inverse. Ainsi, lorsque l'on n'a pas d'observation à un certain instant, on n'a pas d'estimation de β .

Résultats

Le modèle et la méthode sont implémentés dans le code éléments finis Elmer/Ice (parallèle, en fortran 95) (Gagliardini et al., 2013).

Les résultats sont décrits en détail dans l'article, ici on présente rapidement les figures principales. La figure 1.8 présente le coefficient β obtenu par assimilation. On voit, outre l'alternance saisonnière hiver/été, que β diminue progressivement au cours des années pendant la phase de latence jusqu'à devenir très faible durant la surge. De plus, on voit que pendant la phase de latence, β diminue plus fortement dans la partie haute du glacier (x proche de 0). On voit aussi très nettement le changement de régime lié à la surge, ainsi

que la diminution progressive de β depuis le haut vers le bas du glacier.

La figure 1.9 présente le quotient entre la vitesse basale $u(z_b)$ (glissement) et la vitesse en surface $u(z_s)$. On voit également une variation progressive de ce quotient, d'à peine 10% en 1973 jusqu'à 60% à l'été 81, avec même 90% en 81 en haut du glacier. Ceci suggère que l'accélération se fait bien par une augmentation progressive du glissement (et non un déclenchement brutal), et que le glissement entre pour une large part dans l'accélération du glacier pendant la surge, mais aussi pendant la phase de latence. Sur cette figure également on voit se dégager nettement deux régimes surge/latence, avec des rapports proches de 100% pendant la surge, et l'augmentation de ce rapport depuis le haut du glacier vers le bas.

Le paragraphe §6 du papier présente des résultats auxquels je n'ai pas contribué, proposant une loi de glissement plus complexe, pour tenir compte de la pression de l'eau sous-glaciaire, je ne rentre pas dans les détails ici.

Les figures 1.10 et 1.11 présentent des simulations directes effectuées avec les paramètres β identifiés, pendant la phase de latence et pendant la surge, comparées aux observations. Pour cela, on fait tourner le modèle direct avec β et l'équation d'évolution suivante pour la surface libre :

$$\partial_t z_s + u_x \partial_x z_s - u_z = a_s$$

où a_s est le bilan de masse en surface, modélisé par une fonction explicite dépendant linéairement de z_s . Les différences que l'on remarque entre les observations et le modèle peuvent s'expliquer par les erreurs dans ce bilan de masse et/ou par les effets tri-dimensionnels que l'on a négligés. Malgré cela, on arrive à mettre en évidence correctement avec le modèle les éléments suivants :

- la surge est en phase avec les observations, autrement dit le champ de β reconstruit permet bien de générer la surge du glacier ;
- le modèle présente bien la caractéristique typique d'amincissement du glacier en haut et d'épaississement en bas.

En conclusion, la capacité du modèle à bien de rendre compte des caractéristiques principales de la surge offre une validation a posteriori de la reconstruction du coefficient β par assimilation de données avec la méthode de Chaabane and Jaoua (1999); Arthern and Gudmundsson (2010). Ce papier proposait la première application de cette méthode à un cas réel, et en démontre la faisabilité, et la pertinence pour étudier le frottement basal.

1.2.4 Contribution du Groenland à la montée du niveau des mers

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article [7], qui s'intéresse à la contribution du Groenland à la montée du niveau des mers.

Introduction

Le Groenland perd de la masse à un rythme qui va s'accroissant (Rignot et al., 2011). Il semble que ceci soit dû à la combinaison de deux phénomènes : changement du bilan de masse en surface (plus de fonte et/ou moins de précipitations) et augmentation du flux de glace vers l'océan (vêlage d'icebergs). Des études antérieures (Howat et al., 2007; Pritchard et al., 2009; Joughin et al., 2010) ont montré que l'accélération du vêlage était très variable dans le temps et dans l'espace, de sorte que des prédictions réalistes doivent nécessairement

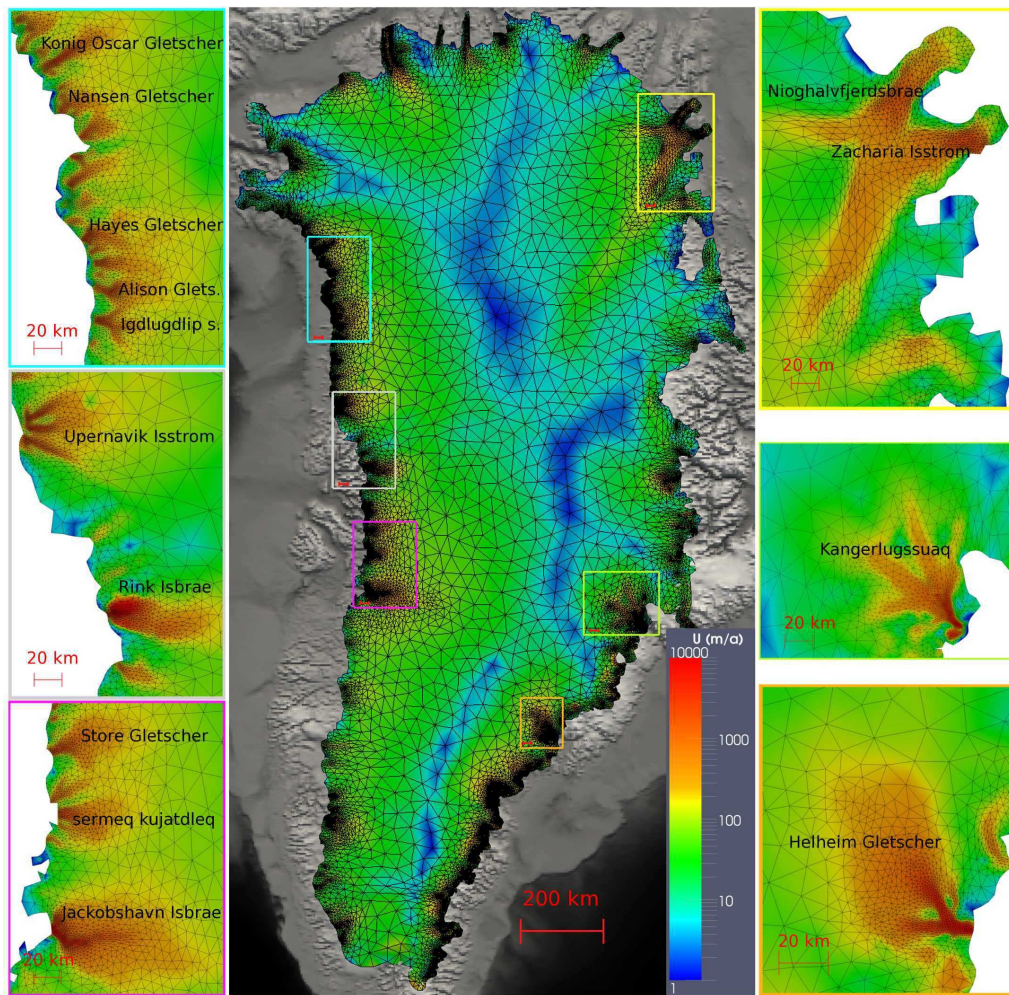


FIGURE 1.12 – Maillage éléments finis non structuré et vitesses en surface modélisées pour le Groenland, après optimisation du frottement basal β par la méthode de Robin. Les zooms présentent quelques glaciers émissaires particulièrement intéressants.

utiliser à la fois un modèle haute précision, un état initial le plus précis possible, et des projections climatiques fiables. Le problème de l'initialisation d'un modèle petite échelle pour le Groenland est donc la motivation de cet article. Les ingrédients de base sont : un modèle Full-Stokes sur une grille non structurée, des méthodes inverses pour tirer le meilleur parti des observations disponibles. Cet article est la première tentative d'utiliser tous ces éléments à l'échelle du Groenland. Plus précisément, l'objectif est d'identifier le champ de frottement basal $\beta(x, y)$ dans un modèle Full-Stokes à partir des observations disponibles en vue de faire des prédictions d'évolution du Groenland.

Modèle et données

Le modèle utilisé résout les équations Full-Stokes non linéaires (loi de Glen avec $n = 3$) en 3D (1.1) à (1.8) décrites page 29. Le coefficient $\mathcal{B}_{AT,n}$ dans l'équation (1.3) dépend effectivement de la température dans la glace (selon une loi d'Arrhenius, cf détails dans

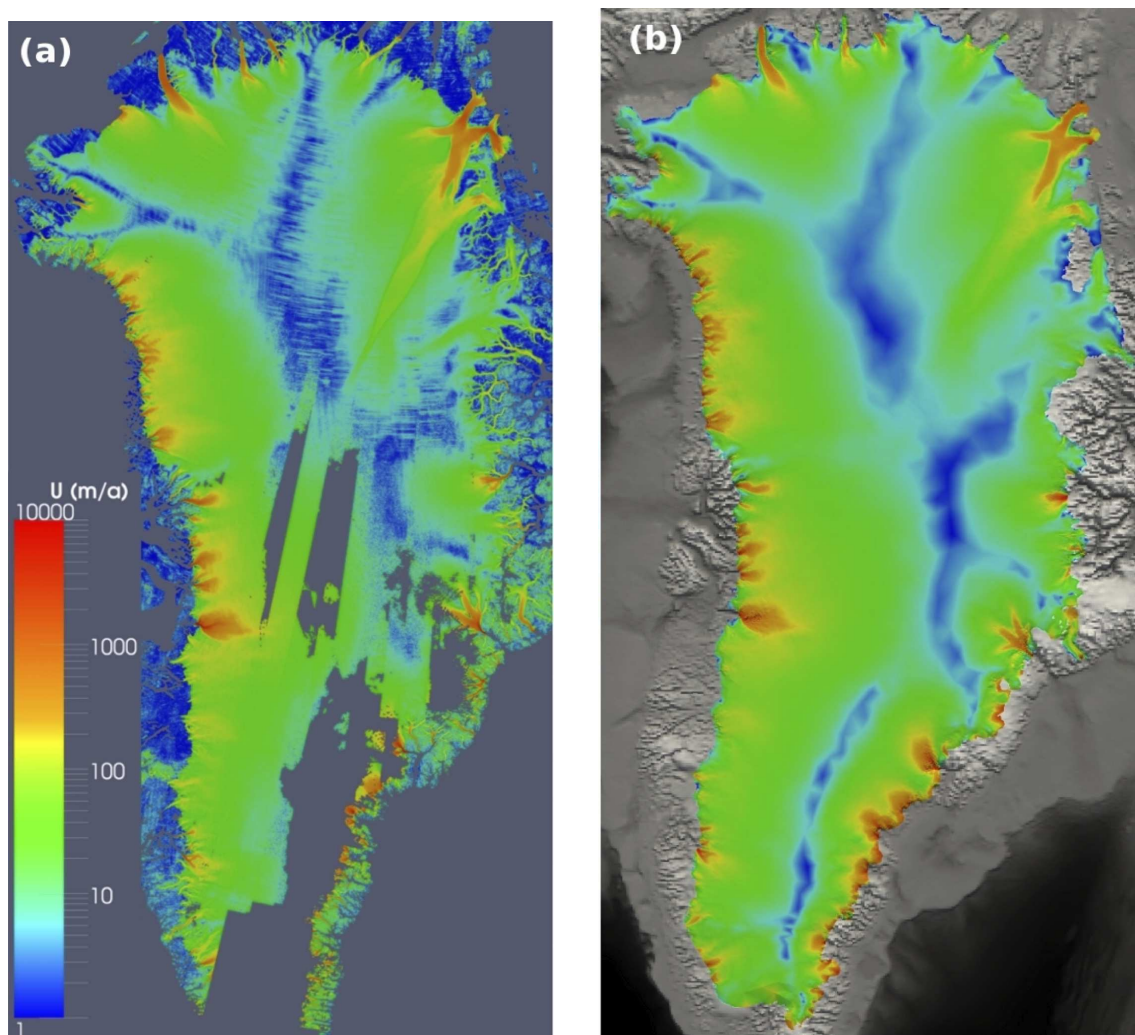


FIGURE 1.13 – Vitesses en surface pour le Groenland, à gauche (a) les vitesses observées ; à droite (b) les vitesses reconstruites après identification de β par la méthode de Robin.

l'article). Le champ de température dans la glace est donné par le modèle SIA SICOPOLIS (Greve, 1997; Seddik et al., 2012), pris constant en temps.

Le code numérique Elmer/Ice⁸ Gagliardini et al. (2013) résout ces équations sur la totalité du Groenland avec un maillage non structuré. La construction du maillage initial utilise des ingrédients classiques : estimation d'erreur grâce à la matrice Hessienne des vitesses observées, puis adaptation de maillage avec le logiciel YAMS (Frey and Alauzet, 2005). Au cours de la simulation, dans une certaine mesure, ce maillage est adaptatif, mais les noeuds ne peuvent se déplacer que verticalement. Le maillage est visible par exemple sur la figure 1.12. On renvoie à Gagliardini and Zwinger (2008) pour les détails numériques du modèle.

Le socle et la topographie de surface viennent des données SeaRise⁹ (Bamber et al., 2001). Les vitesses observées proviennent de Joughin et al. (2010), elles sont présentées

8. <http://elmerice.elmerfem.org>

9. <http://tinyurl.com/srise-umt>

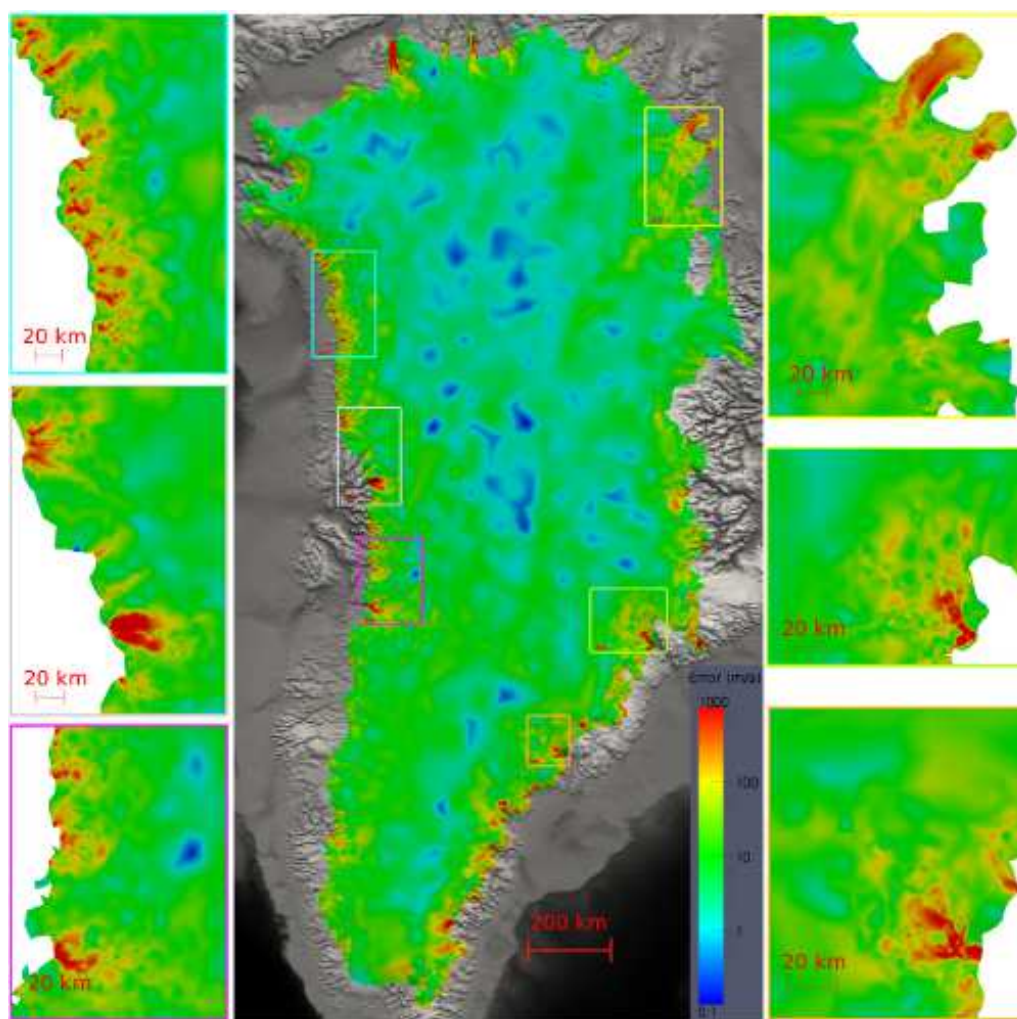


FIGURE 1.14 – Erreur absolue pour les vitesses de surface $|\mathbf{u}^{\text{modèle}} - \mathbf{u}^{\text{obs}}|$ en m/an après identification de β par la méthode de Robin.

à la figure 1.13 (a). On observe également le taux de variation de l'altitude de surface (Pritchard et al., 2009). Notons ici que les vitesses observées sont produites à partir de données distribuées en temps sur la décennie 2000–09, alors que la topographie de surface a été produite en 2001 (avec tout de même des mises à jour pour les trois glaciers émissaires principaux).

Méthodes

Rappelons que l'objectif est d'identifier le champ de frottement basal $\beta(x, y)$. Dans cet article on utilise et on compare deux méthodes : la méthode de Robin et la méthode de contrôle approchée en faisant l'approximation auto-adjointe pour le modèle, introduite pour le modèle Full-Stokes par Morlighem et al. (2010).

La méthode de Robin a déjà été présentée au paragraphe 1.2.3. La méthode de contrôle

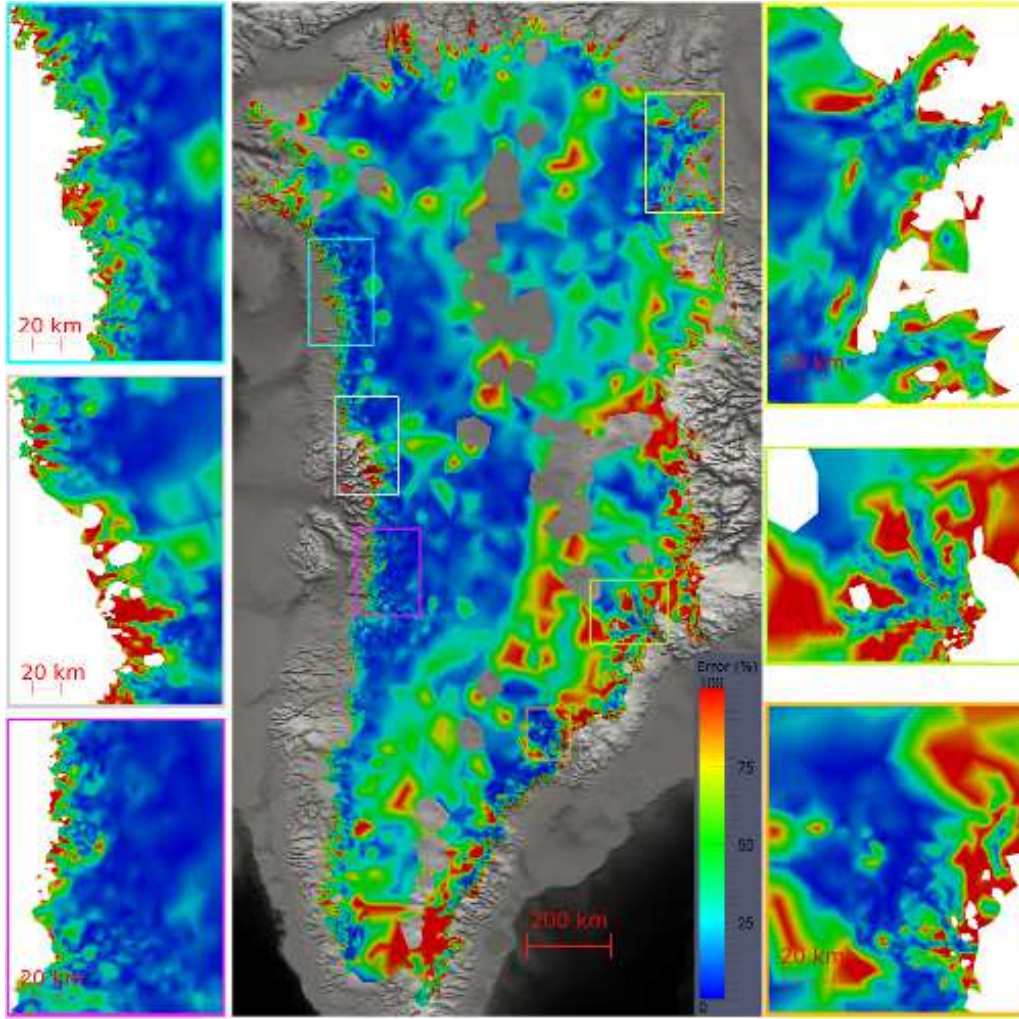


FIGURE 1.15 – Erreur relative pour les vitesses de surface $|\mathbf{u}^{\text{modèle}} - \mathbf{u}^{\text{obs}}|/|\mathbf{u}^{\text{obs}}|$ en % après identification de β par la méthode de Robin. Les zones où $|\mathbf{u}^{\text{obs}}| < 2.5$ m/an ne sont pas représentées.

consiste à minimiser la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}_o = \int_{\Gamma_s} \frac{1}{2} \left(|\mathbf{u}_H| - |\mathbf{u}_H^{\text{obs}}| \right)^2 d\Gamma$$

où \mathbf{u}^{obs} sont les vitesses observées et H représente la composante horizontale de la vitesse. La dérivée de la vitesse est donnée par

$$d_{\beta} \mathcal{J}_o(\beta') = \int_{\Gamma_b} -\beta' \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est la solution des équations adjointes.

Noter comme précédemment que ces deux méthodes présentent deux défauts :

1. les dérivées des fonctions coûts ne sont exactes que pour des rhéologies linéaires ($n = 1$), et seulement approchées dans le cas réaliste qui nous intéresse ici, où la viscosité suit la loi de Glen avec $n = 3$;

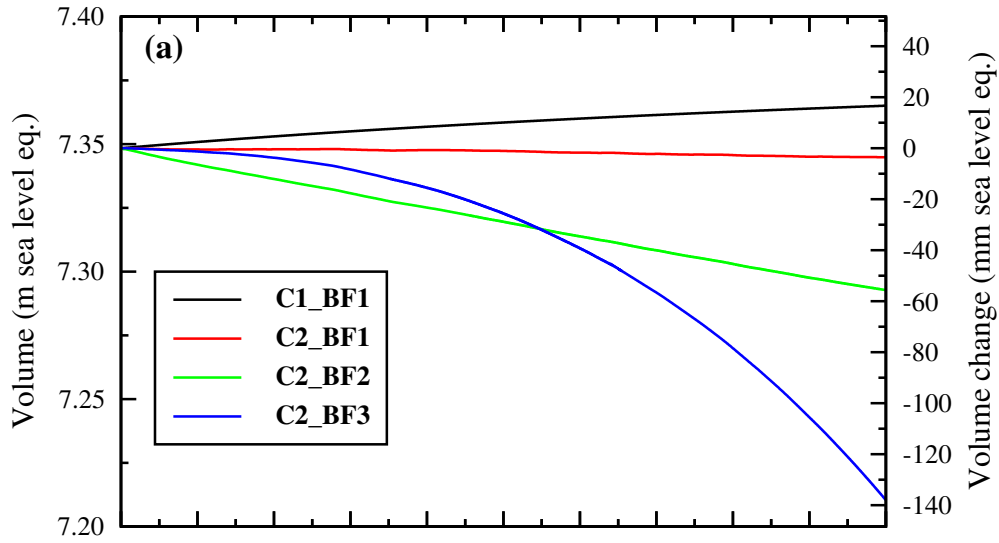


FIGURE 1.16 – Projections de l'évolution du niveau des mers pour les scénarios climatiques C1 (conditions actuelles), C2 (scénario IPCC A1B) et les scénarios de friction basale BF1 (constant), BF2 (moitié moindre que BF1), BF3 (décroissant d'un ordre de grandeur en 100 ans).

2. de plus, elles ne permettent pas d'assimiler des séries temporelles de données, puisque l'une comme l'autre ne travaillent que sur la partie diagnostique du modèle (équation pour les vitesses) et non sur l'équation d'évolution de la surface libre.

Néanmoins, ces méthodes présentent l'avantage d'être facilement implémentables et assez peu coûteuses. A contrario, calculer l'adjoint du modèle Full-Stokes est complexe en pratique. En effet, la non-linéarité est traitée numériquement par des itérations de Picard, et calculer l'adjoint d'un tel algorithme est aussi coûteux que délicat, voir Griewank and Walther (2008).

Ces deux méthodes sont implémentées en cherchant α tel que $\beta = 10^\alpha$, et sont régularisées comme précédemment :

$$\mathcal{J}_{\text{tot}}(\alpha) = \mathcal{J}_o(\alpha) + \lambda \mathcal{J}_{\text{reg}}(\alpha), \quad \mathcal{J}_{\text{reg}}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_b} (\partial_x \alpha)^2 + (\partial_y \alpha)^2 d\Gamma$$

Le choix de λ se fait par la méthode de la L-curve, et la minimisation par la méthode quasi-Newton M1QN3 de Gilbert and Lemaréchal (1989), on renvoie à l'article pour les détails.

Résultats

Le modèle et la méthode sont implémentés dans le code éléments finis Elmer/Ice (parallèle, en fortran 95) (Gagliardini et al., 2013).

Reconstruction des vitesses en surface. Les figures 1.12 et 1.13 (b) présentent les vitesses reconstruites après identification de β par la méthode de Robin. Les résultats obtenus avec la méthode de contrôle sont très similaires. Les grandes lignes de l'écoulement

sont très bien reconstituées : faibles vitesses dans les zones centrales, fleuves de glace bien localisés et individualisables, bonne reconstitution des plus grands glaciers émissaires et de leurs bassins versants.

Les figures 1.14 et 1.15 présentent les erreurs absolues et relatives entre les vitesses reconstituées et les vitesses observées. Comme pour les vitesses, les erreurs varient de plusieurs ordres de grandeur entre l'intérieur et la côte. On trouve les plus grandes erreurs sur les bords. Plusieurs explications permettent de les comprendre :

1. les observations de vitesses en surface et de topographie de surface ne correspondent pas, puisqu'elles ne sont pas mesurées aux mêmes dates ;
2. certains fleuves de glace, notamment au nord, se terminent par de longues langues de glace flottantes, non résolues par le modèle ;
3. la minimisation se fait avec un gradient approché ;
4. on n'identifie que le paramètre de glissement $\beta(x, y)$ et pas les autres sources d'incertitudes du modèle (notamment le socle rocheux) ;
5. la résolution du modèle est moins bonne que celle des données de vitesse ;
6. la résolution des données d'épaisseur de glace est moins bonne que celle du modèle, notamment dans les glaciers émissaires où une bonne résolution est cruciale.

Expériences de sensibilité et projections. L'objectif de l'identification du champ de $\beta(x, y)$ est d'initialiser le modèle en vue de faire des prévisions de l'évolution du volume de glace sur le Groenland. Ceci pose a priori plusieurs problèmes et questions :

1. le problème (bien connu des glaciologues pour toute méthode inverse n'incorporant pas de série temporelle de données) du choc d'initialisation : la surface libre présente des taux de variation non physiques, en particulier sur les bords, et l'ajustement vers des taux réalistes peut prendre quelques dizaines d'années ;
2. quel scénario choisir pour le bilan de masse en surface (précipitations – fonte), en lien avec quel scénario climatique ?
3. comment va évoluer le paramètre β avec le temps ?

Pour répondre au premier point, on commence par relaxer le modèle, c'est-à-dire le laisser évoluer librement pendant 50 an, en gardant constant le bilan de masse en surface. Ceci permet de stabiliser un peu la calotte et de corriger en partie les erreurs de vitesse et de vêlage dans les glaciers émissaires (voir le papier pour les détails).

Pour les points suivants, on choisit deux scénarios pour le bilan de masse en surface (C1 : conditions actuelles ; C2 : scénario A1B¹⁰ de l'IPCC¹¹), et trois scénarios pour l'évolution de β (BF1 : constant ; BF2 : divisé par deux ; BF3 : décroissant d'un ordre de grandeur sur 100 ans), et on a fait tourner des expériences pour chacun de ces scénarios. La figure 1.16 montre l'évolution du volume du Groenland (et de l'équivalent en terme de changement de niveau de mers), et montre une grande sensibilité aux conditions de frottement. Le scénario BF3 correspond à l'accélération simultanée de tous les glaciers émissaires, c'est donc une borne supérieure pour nos projections. Combinée avec le scénario climatique C2, la projection est de 14 cm d'élévation du niveau des mers en 100 ans pour

10. Scénario A1B : Croissance économique forte, équilibre entre les différentes sources d'énergie, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Special_Report_on_Emissions_Scenarios

11. IPCC : International Panel on Climate Change, Groupe International d'Experts sur le Climat (GIEC).

le Groenland. Cette valeur est dans les bornes fournies par d'autres travaux sur le sujet. Le scénario intermédiaire C2-BF2 donne également des valeurs comparables avec celles disponibles dans la littérature. On renvoie à l'article pour des discussions plus approfondies de ces résultats.

En conclusion, on a montré que l'on pouvait obtenir des résultats satisfaisants avec les méthodes d'assimilation approchées disponibles actuellement en glaciologie et le modèle réaliste Elmer/Ice (Gagliardini et al., 2013). On a vu qu'il subsistait beaucoup d'incertitudes, il y a donc une bonne marge d'amélioration des méthodes. Cependant ceci permet déjà de fournir des premières estimations de la contribution de la dynamique du Groenland à son changement de masse et au niveau des mers.

1.2.5 Paléoclimatologie : reconstruction d'un scénario climatique

Dans ce paragraphe, on résume la problématique, le modèle et la méthode contenus dans l'acte de conférence [17]. Les résultats sont plus complets ici que ceux qui sont dans l'acte, et ont été présentés oralement dans plusieurs conférences.

Présentation du problème

Le problème étudié dans ce travail est celui que l'on a mentionné plus haut à la page 35 : connaissant des observations de volume de glace au cours du temps, comment reconstituer le scénario de température à l'origine de ces variations. On étudie ce problème dans un cadre simplifié d'expériences jumelles, c'est-à-dire que nous générons nous-mêmes des observations à partir d'un modèle. Le modèle choisi est un modèle SIA (voir la section 1.2.1 page 30) sur une ligne d'écoulement. Le choix de l'approximation SIA est justifié par les échelles de temps mises en jeu : nos expériences ont lieu sur 20,000 ans ! Le choix du modèle en ligne d'écoulement 2D est plus discutable, il faudrait en pratique pouvoir proposer plusieurs lignes d'écoulement (un pour chacune des grandes calottes de la période étudiée), mais on commence avec une seule ligne pour étudier la faisabilité du problème.

Comme on l'a dit précédemment, il n'y a actuellement que peu de méthodes inverses mises en œuvre pour résoudre un tel problème, on propose donc une première expérience avec la méthode adjointe.

Modèle et méthode adjointe

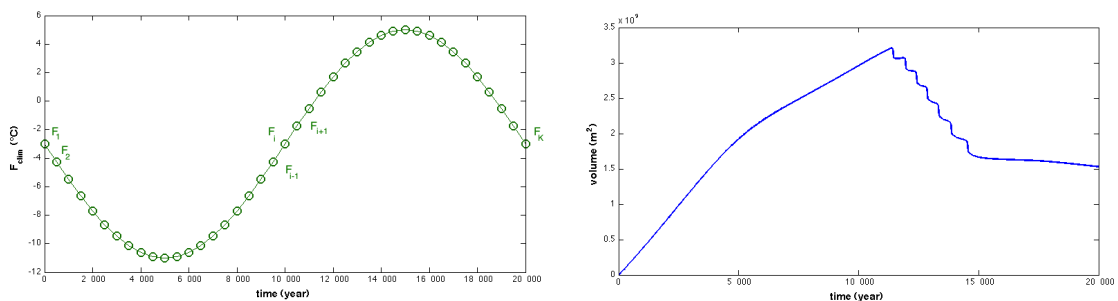


FIGURE 1.17 – Etat de référence (vrai) pour les expériences jumelles. A gauche, le scénario climatique choisi T_{clim} ; à droite les observations de volume générées Vol^{obs} .

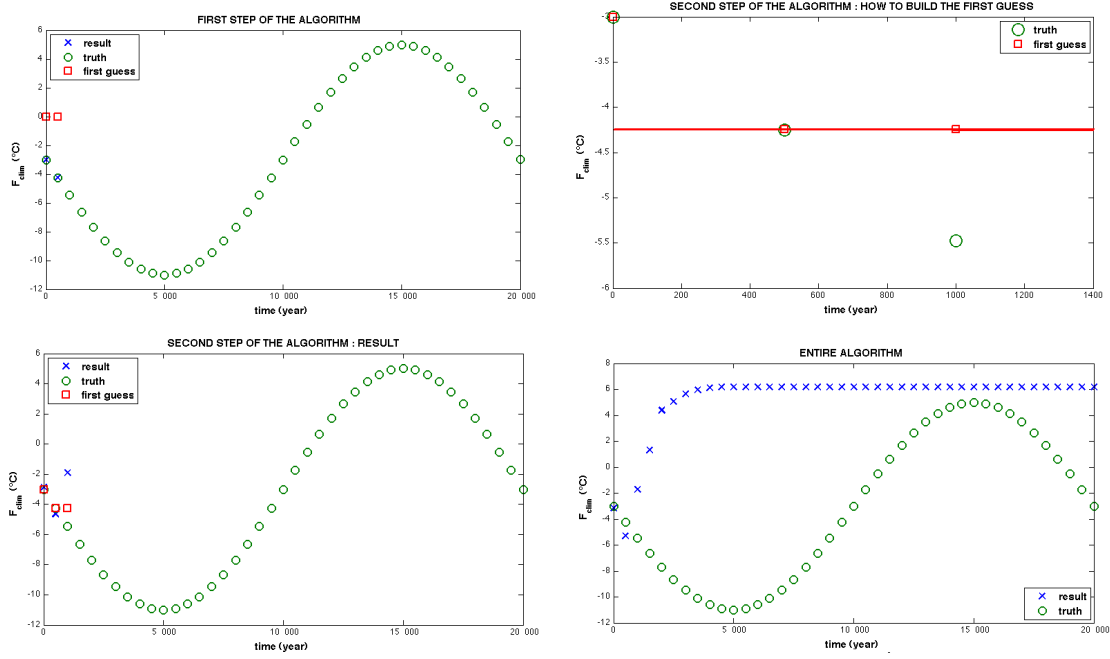


FIGURE 1.18 – Identification de la température par expériences jumelles avec des observations de volume. Assimilation par fenêtre croissante, nouvelle ébauche choisie égale à la précédente. En haut à gauche : 1ère étape. En haut à droite : choix de l'ébauche pour la deuxième étape. En bas à gauche : 2ème étape. En bas à droite : résultat obtenu à la fin de l'assimilation.

Le modèle choisi est donc l'approximation SIA 2D (x, z) . Pour cela on reprend les équations précédentes, sans la variable y : conservation de la masse (1.9), équation pour la dynamique $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{def}}$ avec \mathbf{U}_{def} donnée par (1.12) et \mathbf{U}_{slid} nulle, bilan de masse en surface donné par les équations (1.16) à (1.19). Numériquement, on utilise le code Winnie développé par le LGGE (C. Ritz), qui est un prototype du code 3D GRISLI de Ritz et al. (2001). Pour cette première expérience on a choisi le socle plat $B(t, x) = 0$ et le bilan de masse au fond nul $\dot{f} = 0$. La température en surface est donnée par

$$T_S(t, x) = T_{\text{clim}}(t) + bx + cS(t, x)$$

et le but du papier est de retrouver $T_{\text{clim}}(t)$ grâce à des observations du volume de glace au cours du temps :

$$\text{Vol}(t) = \int_x H(t, x) dx$$

Pour cela on se donne un état de référence, l'état *vrai*, que l'on utilise pour générer des observations de volume de glace pendant 20,000 ans. Ensuite on forme une fonction coût qui mesure l'écart aux observations, à laquelle on ajoute un terme d'ébauche pour régulariser.

On minimise la fonction coût par une méthode de descente Quasi-Newton. Le gradient est calculé grâce à l'état adjoint du modèle, que l'on a dérivé à la main en suivant les recettes de Giering and Kaminski (1998). L'adjoint est validé au moyen des tests du

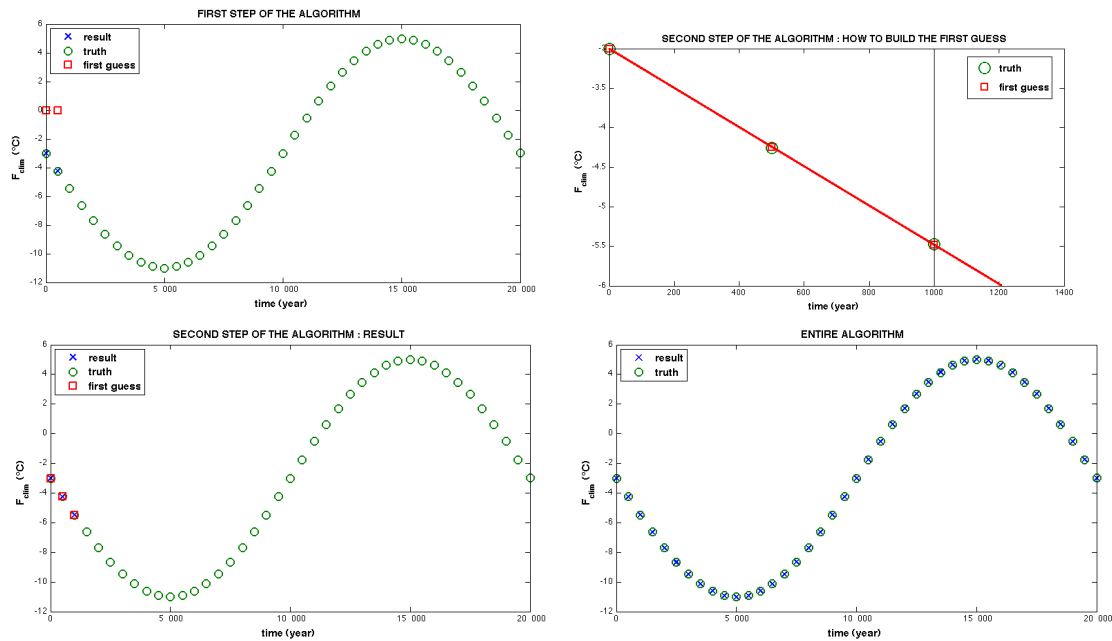


FIGURE 1.19 – Identification de la température par expériences jumelles avec des observations de volume. Assimilation par fenêtre croissante, nouvelle ébauche choisie par interpolation linéaire avec les deux pas de temps précédents. En haut à gauche : 1ère étape. En haut à droite : choix de l'ébauche pour la deuxième étape. En bas à gauche : 2ème étape. En bas à droite : résultat obtenu à la fin de l'assimilation.

gradient, qui vérifient que le gradient calculé par l'adjoint et par différences finies coïncident à l'ordre 1 et à l'ordre 2 pour quelques perturbations. Plus précisément, on se donne une température T_{clim}^0 on choisit une perturbation T , on calcule $\mathcal{J}(T_{\text{clim}}^0 + \alpha T) - \mathcal{J}(T_{\text{clim}}^0)$ pour divers α avec le modèle direct, on calcule le gradient avec le modèle adjoint et on vérifie la formule de Taylor à l'ordre 1 et 2.

Résultats numériques

Nous travaillons ici avec la version Matlab de Winnie.

Les expériences numériques ont montré une très grande sensibilité au choix de l'ébauche et des difficultés à obtenir la convergence de l'algorithme vers le scénario voulu, on va illustrer tout ceci avec quelques tests.

Tout d'abord, on a commencé avec le scénario climatique présenté à la figure 1.17. Pour commencer, on a choisi un signal oscillant avec une période de 20,000 ans variant entre -11°C et 5°C . Le choix de l'ébauche et du point de départ de la minimisation était déterminant : en partant d'une température nulle, l'algorithme n'a jamais réussi à converger vers quelque chose approchant la vérité. Nous avons donc décidé d'utiliser une fenêtre croissante, c'est-à-dire de faire plusieurs expériences d'assimilation successives : la première sur l'intervalle de temps $[0; 500]$, la deuxième sur $[0; 1\,000]$, puis sur $[0; 1\,500]$, et ainsi de suite jusqu'à assimiler les observations sur $[0; 20\,000]$. Pour chaque nouvelle expérience on reprend comme ébauche le résultat obtenu précédemment, et on choisit une nouvelle estimation pour le nouveau point où l'ébauche est requise.

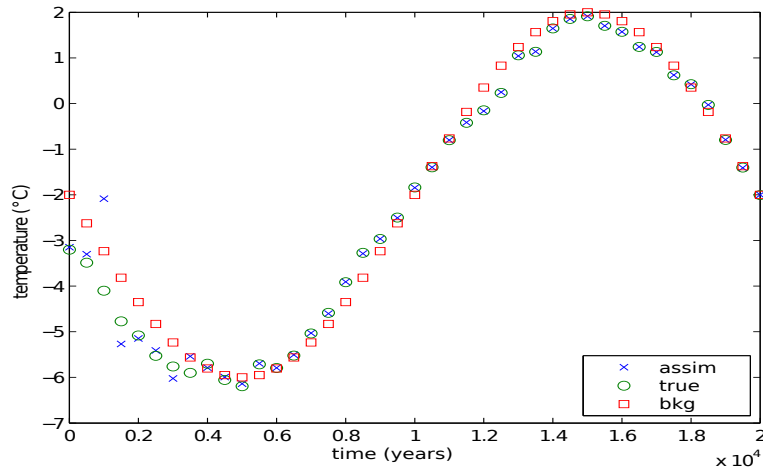


FIGURE 1.20 – Identification de la température par expériences jumelles avec des observations de volume. Assimilation par fenêtre globale. Résultat obtenu pour une température de référence comprise entre -6°C et 2°C .

La figure 1.18 présente la première option que nous avons choisie : après avoir faire l’assimilation sur $[0; 500]$ on prend $T^b(100) = T^b(500)$. Ceci donne de mauvais résultats, l’algorithme part instantanément dans un minimum local et n’arrive pas à en sortir.

La figure 1.19 présente une autre stratégie : $T^b(1000)$ est calculée en prolongeant la droite qui relie $T^b(0)$ à $T^b(500)$. Cette fois la convergence est très bonne, mais elle est un peu “facile” car ce choix de l’ébauche est très proche de la solution vraie, puisqu’il s’agit d’une fonction sinus très régulière, bien approchée par sa tangente.

Nous avons donc procédé à un autre type d’expériences, à savoir assimiler globalement (ie directement sur $[0; 20,000]$) une température réelle qui ne soit pas un sinus mais une perturbation d’un sinus, en prenant comme ébauche une fonction sinusoïdale proche. Ceci a donné de bons résultats (non montrés ici). Ensuite, nous avons cherché à augmenter la température de référence afin qu’elle soit plus réaliste. Nous l’avons donc fait augmenter jusqu’à $[-6^{\circ}\text{C}; 2^{\circ}\text{C}]$, et nous présentons les résultats obtenus à la figure 1.20. Au-delà de ces températures la reconstruction marche très mal. Ceci peut s’expliquer aisément par le fait que lorsque la température est élevée, dans la deuxième partie de la période, la calotte se déglace, autrement dit elle perd de la masse par fusion. Le problème ici est que n’importe quelle température au-delà d’un certain seuil peut permettre d’expliquer cette déglaciation : on n’a donc plus unicité du minimum global, donc perte de controlabilité, ce qui explique nos difficultés.

1.2.6 Initialisation d'un modèle grande échelle par filtrage ETKF

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article soumis [22], dans le cadre du travail de thèse de B. Bonan, en collaboration avec C. Ritz et V. Peyaud du LGGE.

Présentation

Cet article s'intéresse au problème de la contribution des calottes polaires au changement de niveau des mers, comme décrit dans le paragraphe 1.2.2, à savoir : comment tenir compte des observations disponibles pour construire un bon état initial, en vue de faire des prévisions de volume de glace gagné ou perdu par la calotte. Dans le paragraphe 1.2.2 on a présenté le problème, les observations disponibles, et les travaux passés sur le sujet. Ici on va s'intéresser à ce problème d'initialisation dans le contexte suivant :

- méthode d'assimilation moderne (filtre de Kalman d'Ensemble ETKF) ;
- modèle grande échelle SIA, pour le moment en 2D le long d'une ligne d'écoulement ;
- inversion simultanée du coefficient de frottement $\beta(x)$ ainsi que du socle rocheux $B_{\text{soc}}(x)$.

Le modèle choisi est la SIA en 2D x, z , et plus précisément les équations (1.10) pour la conservation de la masse, avec $\dot{f} = 0$, les équations (1.11, 1.12, 1.13) pour la dynamique (avec vitesse de glissement SIA), et enfin les équations (1.16) à (1.19) pour le bilan de masse en surface.

Pour le moment, l'utilisation de la SSA (1.15) pour calculer la vitesse de glissement U_{slid} ne fonctionne pas encore, on se heurte je pense à des problèmes de contrôlabilité déjà évoqués plus haut : la vitesse totale U se décompose en une partie de déformation qui dépend fortement de B_{soc} et une partie de glissement qui dépend fortement de β , de sorte que deux couples distincts B_{soc}, β peuvent mener à deux couples distincts $U_{\text{def}}, U_{\text{slid}}$ qui mènent à la même vitesse totale U . On réfléchit actuellement à des moyens de lever ce problème, mais en attendant, les résultats présentés ici se contentent du modèle SIA.

L'usage d'un modèle en ligne d'écoulement plutôt que d'un modèle 3D n'est pas restrictif d'un point de vue méthodologique. En effet, le code 2D utilisé, Winnie, est un

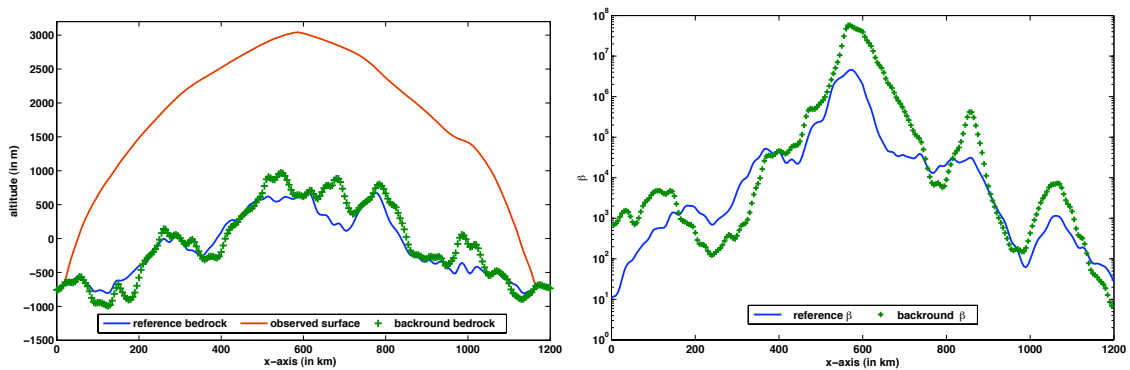


FIGURE 1.21 – Etat vrai (reference state) et ébauche (background state) pour la géométrie (à gauche) et le coefficient de frottement basal (à droite). L'axe x représente l'étendue de la calotte, en kilomètres. A gauche, l'altitude de surface $S(x)$ est la même pour l'ébauche et la référence.

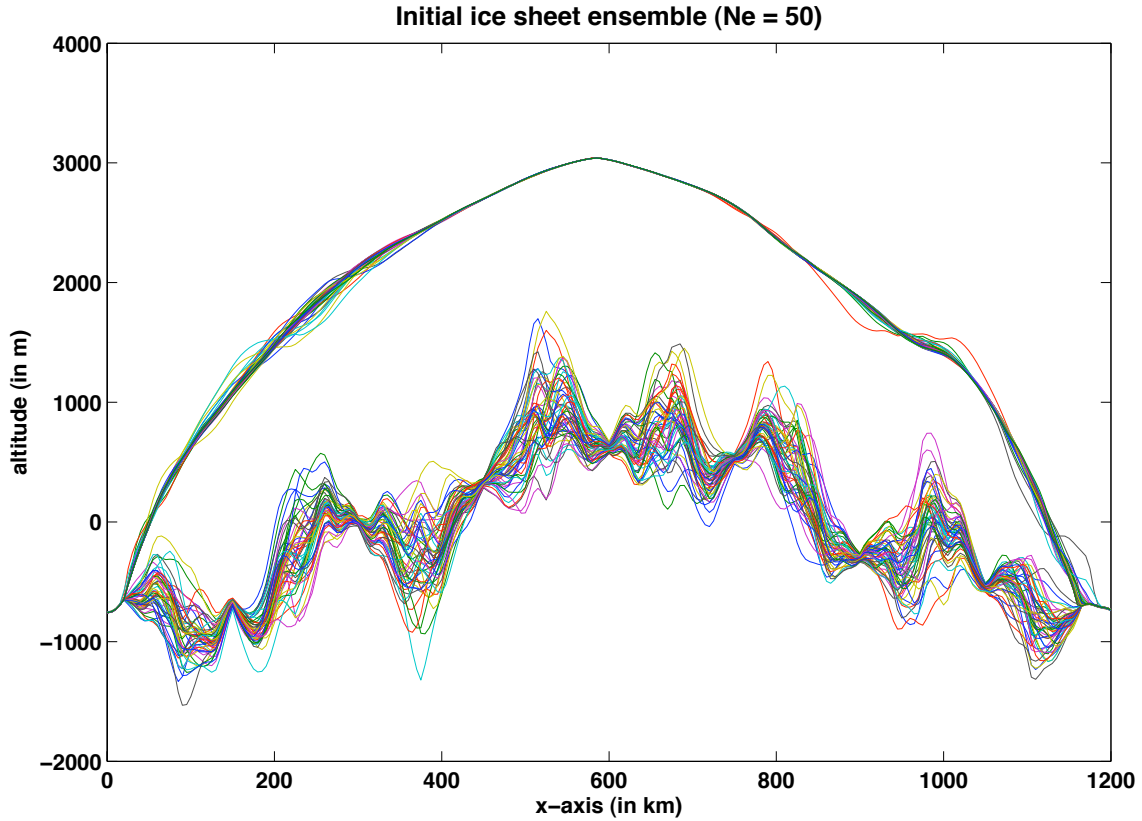


FIGURE 1.22 – Exemple de membres de l'ensemble de départ pour l'ETKF, pour les variables de topographie du socle $B_{\text{soc}}(x)$ et d'altitude de surface $S(x)$. Pour des raisons de lisibilité on n'a dessiné ici que 50 éléments de l'ensemble.

prototype du code 3D GRISLI (Ritz et al., 2001), et on l'utilise pour des validations méthodologiques comme notre travail. Le passage à GRISLI ne poserait de problème qu'en termes de temps de calcul, puisqu'il est nettement plus coûteux. Cependant, les possibilités de parallélisation des algorithmes d'EnKF font que le passage à GRISLI sera envisageable dans un avenir proche.

Méthodes

La méthode d'assimilation est le filtre ETKF, décrit au paragraphe 1.1.5. On effectue des expériences jumelles pour valider le filtre, la figure 1.21 présente l'état vrai et l'ébauche choisie pour $B_{\text{soc}}(x)$, $S(x)$ et $\beta(x)$ qui sont nos variables et paramètres de contrôle. La référence est une ligne d'écoulement du Groenland, en coupe entre l'est et l'ouest, choisie de telle sorte que les extrémités de cette ligne soient dans des glaciers émissaires rapides (Jakobshavn à l'ouest). En pratique, on a choisi des erreurs assez réalistes entre la référence et l'ébauche. L'article détaille la construction et le choix de ces valeurs.

Les éléments de l'ensemble de départ sont générés comme des réalisations d'une loi gaussienne de moyenne l'ébauche et de matrice de covariance donnée. Pour le socle rocheux, la matrice de covariance est donnée par un couple Σ, C de variances/corrélations. Les variances sont choisies de manière réaliste, plus grandes à l'intérieur du domaine là où

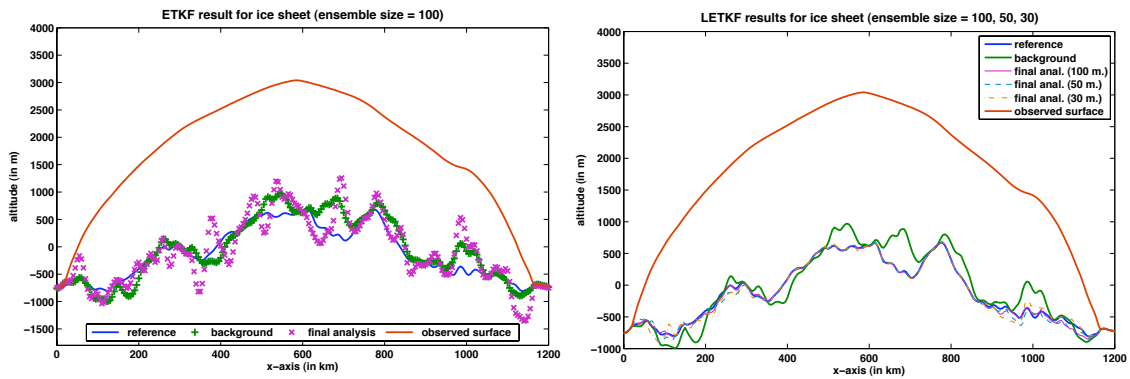


FIGURE 1.23 – Topographie du socle reconstitué après 20 ans d’analyse ETKF sans (à gauche, pour un ensemble à 100 éléments) ou avec (à droite, pour des ensembles à 30, 50 et 100 éléments) inflation/localisation.

l’ébauche est très mauvaise et plus petites sur les bords. Les corrélations sont isotropes, elles sont données par une fonction de corrélation qui est une somme de deux gaussiennes, pour capturer les corrélations grande et petite échelles. On procède de manière similaire pour $\beta(x)$ et $S(x)$ (voir le papier pour plus de détails). La figure 1.22 présente un exemple de membres de l’ensemble.

Les observations sont générées une fois par an pendant 20 ans (on effectue ainsi 20 étapes d’analyse dans le filtre ETKF). On observe alors la surface $S(x)$ et la vitesse de surface $U_s(x)$ en chaque point de grille (c’est-à-dire tous les 5 kilomètres). On observe le socle B_{soc} tous les 60 kilomètres (tous les 30 points de grille). Ces observations sont alors bruitées de manière réaliste, par un bruit blanc gaussien dont l’écart-type est de 2 mètres pour S , de 3 mètres/an pour U_s et de 20 mètres pour B_{soc} .

Résultats numériques

Ici nous travaillons avec la version fortran 95 de Winnie.

Ensemble de grande taille. On effectue tout d’abord une expérience de validation de la méthode avec un grand ensemble (taille $N_e = 1000$), afin de ne pas avoir à gérer tout de suite les problèmes liés au sous-échantillonnage. Pour cette expérience, les résultats sont très bons : l’erreur RMS pour le socle passe de 207m pour l’ébauche à 46m après 20 ans d’ETKF. Pour β on a également une bonne reconstruction, cependant les erreurs RMS n’ont pas beaucoup de sens : en effet, au delà d’une certaine valeur l’effet de β est l’absence de glissement, le modèle ne peut donc distinguer entre $\beta = 10^6$ ou 10^7 . On regarde donc plutôt l’effet de l’assimilation sur la contrepartie “utile”, à savoir les vitesses de glissement. En l’occurrence, les erreurs RMS ne sont pas beaucoup réduites, on passe de 238 m/an à 230 m/an après 20 ans. Cependant, ceci masque les bons résultats sur la quasi totalité de la calotte, à l’exception de quelques points mal restitués aux alentours de $x = 1000$. En ces points, la dynamique est très singulière, de sorte que l’approximation SIA n’est plus valide, et le filtre a également du mal à reconstituer β . On renvoie au papier pour les figures.

Ensemble de petites tailles. On passe ensuite à des ensembles de plus petites tailles, afin de se placer dans un cadre réaliste pour les futures expériences avec un modèle 3D. On effectue donc des expériences avec $N_e = 100, 50$ et 30 . Pour ces tailles de filtre il est nécessaire de mettre en place des stratégies d'inflation et de localisation. On voit en effet sur la figure 1.23 à gauche que, sans ça, les résultats avec $N_e = 100$ sont mauvais. On constate même une augmentation de 50% de l'erreur RMS pour le socle au bout de 20 analyses.

On a donc mis en place l'inflation et la localisation (voir le papier pour les détails). Les résultats, au moins pour la topographie du socle, sont bien meilleurs. La figure 1.23 (à droite) présente les socles obtenus après 20 analyses, on voit une nette amélioration par rapport à l'ébauche, même pour des petites tailles d'ensemble.

Pour les vitesses de glissement, les performances du filtre sont moins claires. Elles sont raisonnablement bonnes sur la plupart de l'étendue de la calotte, mais le sont moins dans certaines zones, qui sont celles où le modèle lui-même semble être en difficulté. Ceci vient probablement du fait que la ligne d'écoulement choisie passe par des glaciers émissaires rapides ainsi que des zones de montagne au relief chahuté, et que la SIA est en défaut dans ces conditions. Malgré cela, la répartition entre vitesse de glissement / vitesse de déformation est tout de même meilleure après assimilation.

1.2.7 Initialisation grande échelle par méthode variationnelle

Ce paragraphe présente un travail en cours, qui a été présenté oralement à l'EGU en 2012, non encore rédigé.

Modèles et configuration

En collaboration avec C. Ritz (LGGE), nous avons également étudié ce problème de l'identification conjointe du socle et du coefficient de frottement par une méthode variationnelle, dans une configuration un peu plus complexe que la précédente. Nous travaillons également avec le code Winnie (fortran), toujours en 2D (x, z), toujours avec la SIA (1.10 à 1.12) mais cette fois nous la combinons avec la SSA pour obtenir la contribution U_{slid} (1.15). Le bilan de masse est le même, donné par les équations (1.16 à 1.19). La topographie du socle rocheux utilisée pour les expériences jumelles est également différente, elle se base sur une ligne d'écoulement réelle du Groenland, telle qu'indiquée à la figure 1.24.

Pour le modèle adjoint, nous utilisons le dérivateur automatique TAPENADE (Hascoët and Pascual, 2013). Les tests de validation montrent une grande sensibilité de la qualité du résultats aux divers choix d'ébauche pour le socle et le coefficient de frottement, suggérant de fortes non-linéarités.

On subodore également un problème de non-contrôlabilité ici, car comme on a pu le dire plus haut, on n'a en général pas unicité dans les couples (B_{soc}, β) qui produisent un jeu d'observations de vitesses et d'altitudes donné.

Expériences jumelles

A l'heure actuelle, l'identification conjointe de B_{soc} et de β ne marche pas, nous présentons donc ci-dessous les résultats positifs, en assimilant d'abord le socle puis la friction.

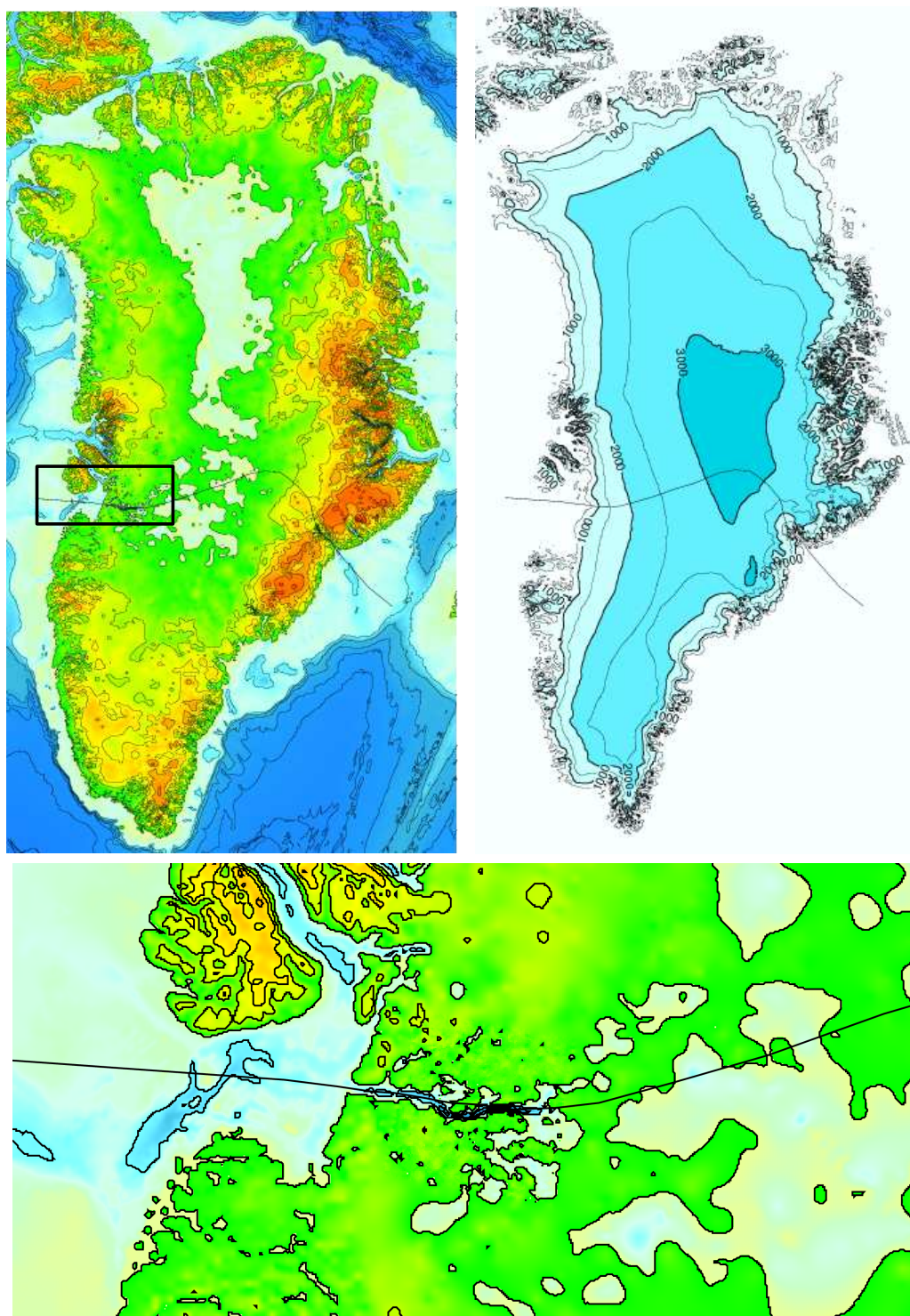


FIGURE 1.24 – Ligne d'écoulement choisie, au Groenland. En haut à gauche la topographie (estimée) du socle rocheux, zoomée en bas autour du canyon du Jakobshavn. En haut à droite l'altitude de la surface de la calotte.

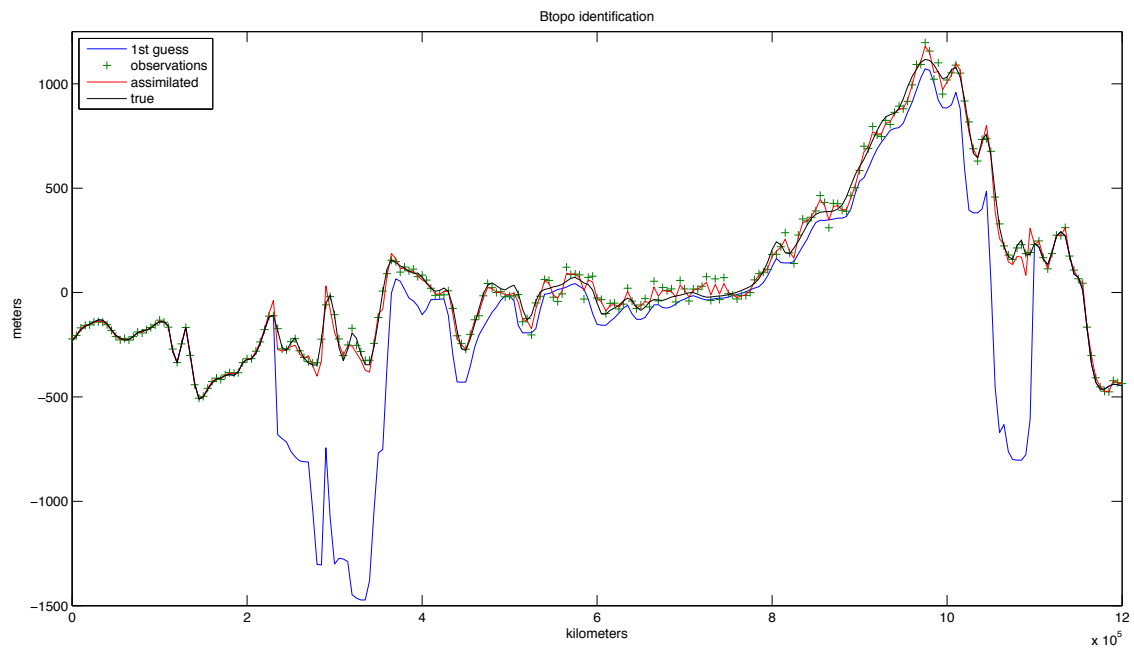


FIGURE 1.25 – Expérience d’identification du socle rocheux : socles obtenus pour l’ébauche, la référence, l’analyse, et les observations.

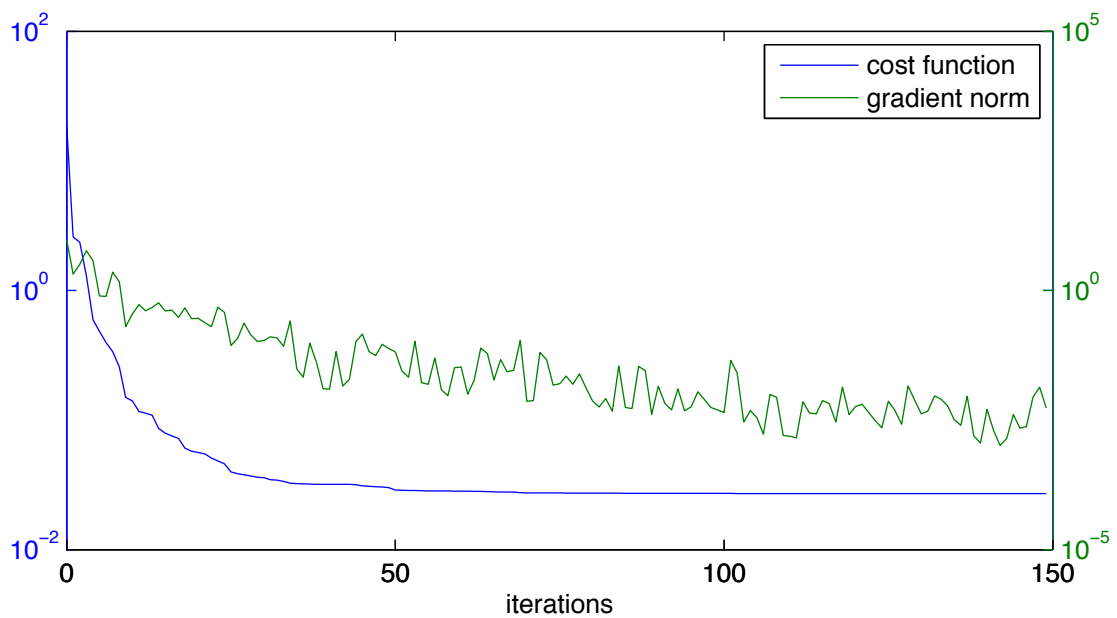


FIGURE 1.26 – Expérience d’identification du coefficient β : Décroissance de la fonction coût et de son gradient au cours des itérations de minimisation.

Comme précédemment on effectue des expériences jumelles. On se donne un état vrai que l'on utilise pour générer des observations de vitesses de surface, socle et altitude de surface. On ajoute ensuite un bruit aux observations :

- pour le socle : 20 mètres dans les zones côtières et 100 mètres à l'intérieur des terres, ce qui est inférieur à la réalité pour le moment ;
- pour le frottement : on écrit $\beta = 10^\alpha$ et on prend une erreur de 1 pour α .

Pour ce qui est de l'ébauche, on utilise les vitesses en surface et l'équation de la SIA pour estimer β , et on prend pour le socle le minimum des valeurs données sur la carte de socle dans un rayon de 20 kilomètres autour du point considéré sur la ligne d'écoulement.

On procède ensuite en deux étapes :

1. On fixe β à l'ébauche, on estime le B_{soc} .
2. Avec le socle obtenu, on identifie β

Première étape : identification du socle. La figure 1.25 présente le résultat obtenu. Cette étape consiste essentiellement en un lissage des observations. On peut en effet écrire la fonction coût associée à ce problème :

$$J(B) = \frac{1}{2} \|GB - B^{\text{obs}}\|_{R^{-1}}^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \|B - B^{\text{1st guess}}\|_{C^{-1}}^2$$

Elle est quadratique, son gradient est explicite :

$$\nabla J(B) = G^T R (GB - B^{\text{obs}}) + \varepsilon C (B - B^{\text{1st guess}})$$

Au minimum, $\nabla J(B) = 0$, et on a :

$$B^{\text{assim}} = (G^T R G + \varepsilon C)^{-1} (G^T R B^{\text{obs}} + \varepsilon C B^{\text{1st guess}})$$

En pratique on n'a pas calculé directement le socle avec la formule ci-dessus mais on a utilisé un algorithme de 4D-Var avec l'adjoint donné par TAPENADE.

Deuxième étape : identification de la friction. Dans un deuxième temps, on a identifié $\alpha = \log_{10}(\beta)$. La figure 1.26 montre la décroissance de la fonction coût et de son gradient. La table suivante montre les erreurs RMS après l'assimilation et confirme la convergence :

	β	α	erreur sur les vitesses en surface
avant assimilation	74%	16%	18
après assimilation	9%	1%	0.007

où on a pris comme mesure d'erreur RMS

$$RMS(X) = \frac{\|X^{\text{tru}} - X\|}{\|X^{\text{tru}}\|}.$$

La suite du travail consistera à étudier puis lever la non-contrôlabilité, en vue d'assimiler conjointement les deux variables.

1.3 Assimilation de données lagrangiennes en océanographie

L'assimilation de données lagrangiennes en océanographie a fait l'objet de mon travail de thèse [0]. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les résultats obtenus pendant la thèse [1] [3] [12] [13], puis on explique l'extension qui en a été faite en collaboration avec A. Vidard et C. Chauvin, pendant son post-doctorat [24].

1.3.1 Présentation du problème

Les données lagrangiennes

Comme on l'a vu au paragraphe 1.1.2, l'assimilation variationnelle est d'abord née en météorologie. Elle a ensuite été introduite en océanographie (Thacker and Long, 1988; Sheinbaum and Anderson, 1990) et est désormais utilisée largement, en particulier en océanographie opérationnelle (Brasseur et al., 2005). Les données lagrangiennes sont un type particulier de données dont l'assimilation a commencé plus récemment. Traditionnellement, les observations disponibles en océanographie sont de deux sortes : in-situ (navires, bouées, mouillages), ou satellitales. Les données satellitales offrent une grande quantité d'information, avec une bonne couverture spatiale et temporelle. Leur arrivée a grandement amélioré notre connaissance de l'océan et a permis la mise en place de systèmes opérationnels de prévision de l'océan. Cependant, ces données concernent essentiellement la surface de l'océan, ou tout au moins ses premiers mètres. Les données in-situ, bien moins nombreuses et inégalement réparties dans le temps et dans l'espace, permettent d'avoir une information sur les zones plus profondes de l'océan, et complètent donc les données satellitaires. Les observations lagrangiennes sont de ce type : il s'agit des positions de flotteurs dérivants dans l'océan. Il existe plusieurs types de flotteurs dérivants. Certains sont suivis en profondeur par un système acoustique, mais ceci implique un déploiement technique important et seules quelques campagnes localisées ont pu être effectuées. D'autres dérivent en surface, mais dans ce cas ils sont extrêmement sensibles aux conditions météorologiques et leur utilisation dans un modèle purement océanique est complexe. Le dernier type de flotteur est celui des flotteurs Argo (ou Med-Argo en Méditerranée) : ces flotteurs dérivent à une profondeur de parking d'environ 1,000 mètres, et tous les dix jours (5 jours en Méditerranée) ils plongent à 2 000 mètres puis remontent en surface en mesurant un profil vertical de température et salinité. Arrivés en surface, ils sont localisés par GPS et transmettent leurs données. Lorsque j'ai commencé ma thèse, ces flotteurs étaient essentiellement utilisés pour leurs données de température et salinité, et la question d'utiliser l'information contenue dans leurs positions commençait tout juste à se poser (Özgökmen et al., 2000; Ide et al., 2002; Kuznetsov et al., 2003).

Rappel des travaux antérieurs

L'utilisation des trajectoires / positions de flotteurs lagrangiens est effectuée de deux manières différentes : soit en les utilisant pour obtenir des informations sur les vitesses eulériennes des courants (méthode des pseudo-observations), soit en les assimilant directement (par filtrage de Kalman ou méthode variationnelle). Cette distinction a lieu car a priori les positions de flotteurs ne font pas partie des variables d'état d'un modèle d'océan,

qui sont en général la température T , la salinité S , les vitesses horizontales (u, v) et la surface libre de l'océan η . La relation entre les variables d'état du modèle et les positions est non-linéaire (elle suppose la résolution d'une équation d'advection), contrairement à la plupart des observations utilisées en océanographie (qui sont des observations directes de u, v, T, S et/ou η).

La méthode des pseudo-observations consiste donc à transformer les positions des flotteurs en information de vitesse, par une simple formule de taux d'accroissement, et ensuite d'utiliser ces vitesses comme de nouvelles observations dans un système de prévision. Cette méthode assez simple a été utilisée avec succès, en particulier pour des études avec des données réelles en Méditerranée, voir Chang et al. (2011); Molcard et al. (2006); Nilsson et al. (2011); Taillandier et al. (2006, 2008).

Par ailleurs, l'assimilation directe a également été étudiée. Contrairement à la méthode des pseudo-observations, la méthode permet d'utiliser directement les observations. Pour cela, il suffit soit d'utiliser un opérateur d'observation complexe, soit d'ajouter au modèle l'advection des flotteurs (ce qui revient au même). Ceci a été effectué avec des méthodes de filtrage de Kalman, puis filtrage de Kalman d'Ensemble (voir Ide et al. (2002); Kuznetsov et al. (2003); Salman et al. (2006)), et également par méthode variationnelle (voir mes travaux [0] [1] [12] [13]), dans le modèle OPA (Madec et al., 1998).

1.3.2 Assimilation lagrangienne dans un contexte opérationnel

Le système opérationnel NEMOVAR

Les travaux d'assimilation directe évoqués précédemment ont été réalisés dans un cadre idéalisé, soit avec des modèles simplifiés, soit avec des modèles réalistes mais dans des configurations simplifiées. Le travail présenté ici [24] présente une implémentation dans le modèle opérationnel NEMO/NEMOVAR. NEMO (Madec (2008)) est une plateforme de modélisation de l'océan, pour la recherche et l'opérationnel, qui fait suite au modèle d'océan OPA (Madec et al. (1998)). L'initiative NEMOVAR regroupe les outils autour de l'assimilation variationnelle dans NEMO (Mogensen et al., 2009; Vidard et al., 2010, 2012), et est actuellement utilisé en opérationnel à l'ECMWF et au Met-Office au Royaume-Uni, ainsi qu'à disposition de la communauté recherche.

Dans NEMOVAR sont disponibles : le modèle tangent et l'adjoint (NEMOTAM, Vidard et al. (2010)), des implémentations d'algorithmes variationnels (3D-FGAT et 4D-Var incrémentaux), ainsi que plusieurs cas-tests (applications à différentes échelles : locale, régionale, globale). On renvoie le lecteur au projet VODA¹² et à Vidard (2012) pour plus de détails.

La configuration utilisée ici, appelée SQB (Cosme et al. (2010)), est celle d'un océan idéalisé aux latitudes moyennes, avec une résolution dite de méso-échelle de $1/4^\circ$, forcée par un vent de surface constant, de manière à obtenir une circulation en double-gyre. On a ainsi un jet central instable et de la turbulence méso-échelle semblable à celle que l'on trouve autour du Gulf-Stream.

Opérateur d'observation pour les flotteurs lagrangiens

Comme on l'a dit plus haut, le vecteur d'état dans l'océan est composé des variables (u, v, T, S, η) . L'opérateur d'observation pour les flotteurs fait le lien entre les variables

12. <http://voda.gforge.inria.fr>

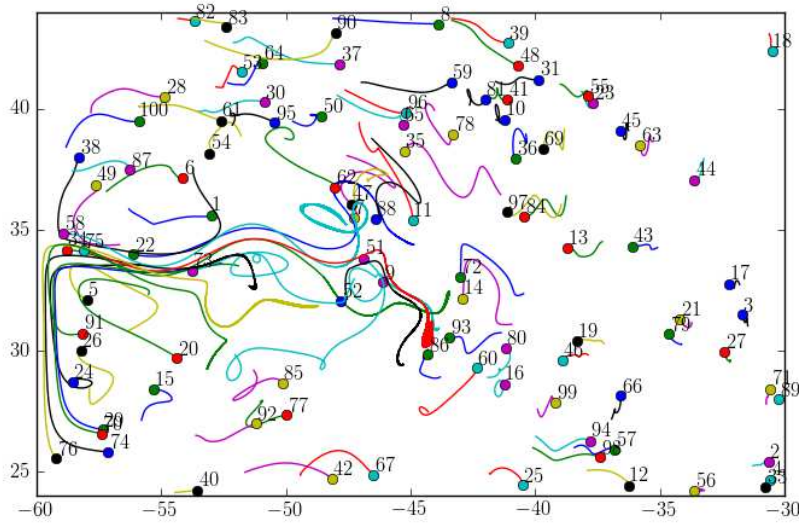


FIGURE 1.27 – Trajectoires de 100 flotteurs pendant deux mois, pour la configuration SQB utilisée, entre les longitudes $-60^\circ W$, $-30^\circ W$ et les latitudes $24^\circ N$, $44^\circ N$.

d'état (ici u et v) et les variables observées, qui sont les positions d'un flotteur d'érivant à profondeur fixée z_0 , que l'on note $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ en m temps d'observation dans la fenêtre d'assimilation $[0, T]$. Définir l'opérateur d'observation revient donc à construire la trajectoire sur $[0, T]$, en utilisant la vitesse du modèle $U(t, x) = (u, v)$ et la position initiale \mathcal{X}_0 à la profondeur z_0 . L'équation que l'on considère est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{dt} = U(t, (\mathcal{X}(t), z_0)), \\ \mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0. \end{cases}$$

Code direct. On la discrétise par un schéma saute-mouton :

1. initialisation

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 & \text{donné,} \\ \mathbb{U}_0 & = \mathbf{I}(U_0, \mathcal{X}_0). \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{X}_1 & = \mathcal{X}_0 + \Delta t \mathbb{U}_0, \\ \mathbb{U}_1 & = \mathbf{I}(U_1, \mathcal{X}_1). \end{cases}$$

2. pour t_k , $k = 2, \dots, n$:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k-2} + 2\Delta t \mathbb{U}_{k-1}, \\ \mathbb{U}_k = \mathbf{I}(U_k, \mathcal{X}_k). \end{cases}$$

Le pas de temps Δt est égal (ou un multiple) au pas de temps du modèle d'océan. L'opérateur $\mathbf{I}(U, \mathcal{X})$ est un opérateur d'interpolation destiné à approcher la valeur exacte de $U(t, \mathcal{X})$. En effet, dans le modèle discret U est un vecteur disponible à chaque pas de temps sur la grille de calcul, alors que le flotteur lui dérive en général hors des points de grille. On suppose pour simplifier que z_0 est une des profondeurs de la grille (voir [24] pour le cas général). Dans ce cas, l'interpolation consiste à identifier les 4 points de grille

horizontaux qui entourent \mathcal{X} , puis à chercher les poids a_i tels que

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^4 a_i Q_i,$$

et ensuite poser

$$\mathbf{I}(f, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^4 a_i f(Q_i)$$

La figure 1.27 présente cent trajectoires de flotteurs ainsi construites, pour deux mois de dérive dans la configuration SQB. Ces trajectoires mettent bien en évidence le caractère chaotique de l'écoulement, puisqu'on peut voir des flotteurs proches au départ emprunter des trajectoires différentes, notamment dans la zone autour de la latitude 34°N et de longitudes entre -60 et -40°W , qui est celle du jet.

Code tangent. Pour le code tangent, on dérive le code saute-mouton :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{X}_k = \delta \mathcal{X}_{k-2} + 2\Delta t \delta \mathbb{U}_{k-1}, \\ \delta \mathbb{U}_k = \mathbf{I}(\delta U_k, \mathcal{X}_k) + \delta \mathcal{X}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathcal{X}_k}(U_k, \mathcal{X}_k). \end{cases}$$

On voit ici qu'il est nécessaire de pouvoir dériver l'opérateur d'interpolation \mathbf{I} . Sa dérivée par rapport à U est simple, car \mathbf{I} est linéaire en U . Par contre, par rapport à la position c'est plus complexe, et tout repose sur un bon choix de la méthode pour calculer les poids a_i . On utilise pour cela la méthode proposée par Daget (2006), qui est une méthode itérative qui a l'avantage d'être à la fois précise pour l'interpolation, et assez aisément dérivable par rapport aux a_i . On renvoie à [24] pour les détails.

Quelques résultats numériques

On renvoie au document [24] pour la description et la validation des algorithmes 3D-FGAT et 4D-Var incrémental (et aux sections 1.1.2 et 1.1.3 pour un rappel sur ces algorithmes). On effectue des expériences de 15 ou 30 jours, dans notre configuration idéalisée mais réaliste, sur le principe des expériences jumelles : un état vrai est choisi, il nous sert à générer des observations. Pour le choix des observations, nous avons reproduit ce qui était disponible dans la zone réelle de SQB au mois de janvier 2010 :

- 49 profileurs dérivent à environ mille mètres de profondeur, et mesurent des profils verticaux de température et salinité entre 2000 m et 200 m. On dispose pour ce mois de 84 profils en tout. Les observations associées sont notées PRF.
- Le satellite ENVISAT mesure périodiquement les anomalies de hauteur d'eau notées SLA dans la suite. On dispose d'environ 12800 mesures pendant un mois sur tout la zone.
- Enfin, chaque flotteur donne sa position tous les 10 ou 15 jours, on note ces observations LAG.

Le document [24] montre que l'assimilation des profils PRF et de la hauteur d'eau SLA fonctionne bien et que ces deux types d'informations sont complémentaires. On présente ici simplement les résultats associées aux données lagrangiennes LAG. La figure 1.28 présente les erreurs RMS pour les 5 variables T , U , V , eke (énergie cinétique turbulente) et η soit

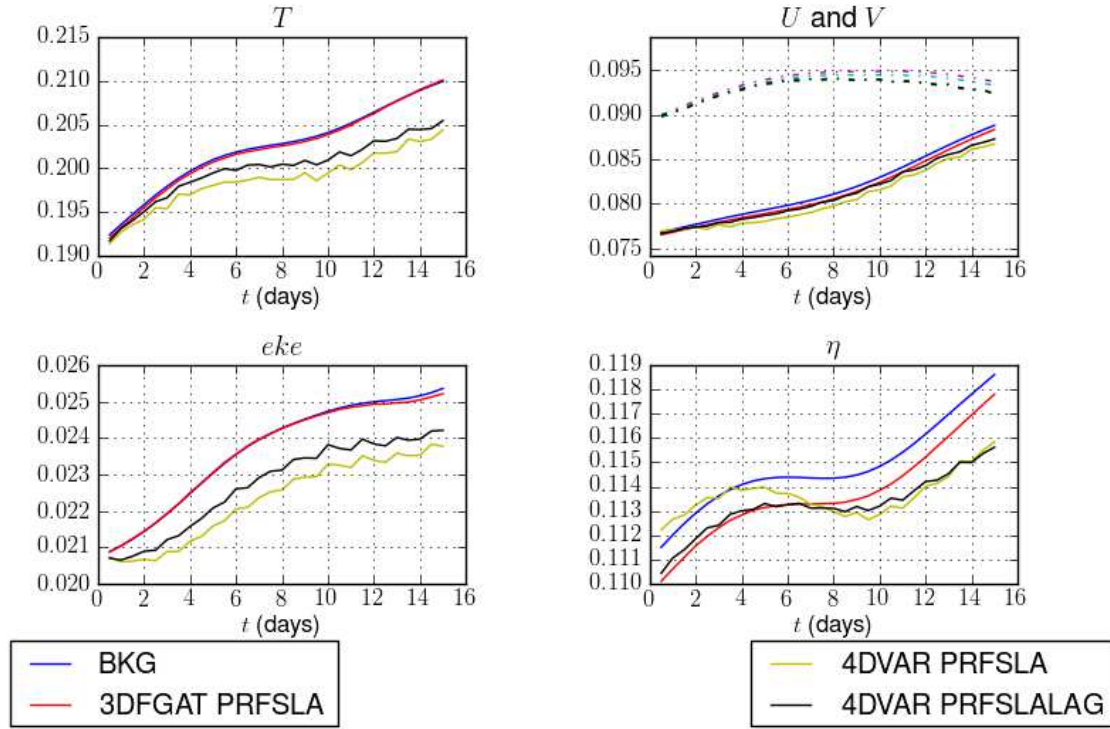


FIGURE 1.28 – Comparaison des erreurs RMS pour les 5 variables T , U , V , eke and η . Trois expériences sont comparées à l'ébauche (bleu) : 3D-FGAT avec des observations de profils et de hauteur d'eau (rouge), 4D-Var incrémental avec des observations de profils et de hauteur d'eau (jaune) puis avec en plus des observations lagrangiennes (noir).

pour l'ébauche (pas d'assimilation), soit pour les observations PRF+SLA (en 3D-FGAT et en 4D-Var incrémental), soit en 4D-Var incrémental pour PRF+SLA+LAG. On constate alors que l'ajout des observations lagrangiennes n'améliore pas les erreurs RMS, et les dégrade même légèrement pour la température et l'énergie cinétique turbulente. On peut proposer plusieurs explications à ceci : d'abord, l'assimilation des données "grande échelle" PRF et SLA introduit dans l'incrément d'analyse des phénomènes petite échelle qui vont perturber les trajectoires des flotteurs et donc perturber la minimisation. D'autre part, on utilise ici un algorithme incrémental, qui suppose donc de linéariser le modèle, avec une fenêtre d'assimilation de 15 jours. On voit dans le document [24] que la durée de validité de l'hypothèse linéaire tangent dépend des observations considérées : elle est assez longue pour les variables d'état (plus de 30 jours), mais pour les positions de flotteurs elle serait plutôt de l'ordre de 8 jours, ce qui est inférieur à la durée entre deux relevés de position et qui pose sans doute un problème ici. Cependant, ce choix de 15 jours est un compromis entre cette hypothèse linéaire tangent (plus c'est court, mieux c'est) et le nombre de données (plus la fenêtre est longue, plus on a d'observations).

On voit néanmoins un gain de l'assimilation des positions lagrangiennes quand on compare les distributions des températures observées et prédites. Pour cela, on présente en figure 1.29 deux types de diagrammes statistiques. Dans la colonne de gauche, on dessine simplement le nuage des points formés par une observation de température d'un profi-

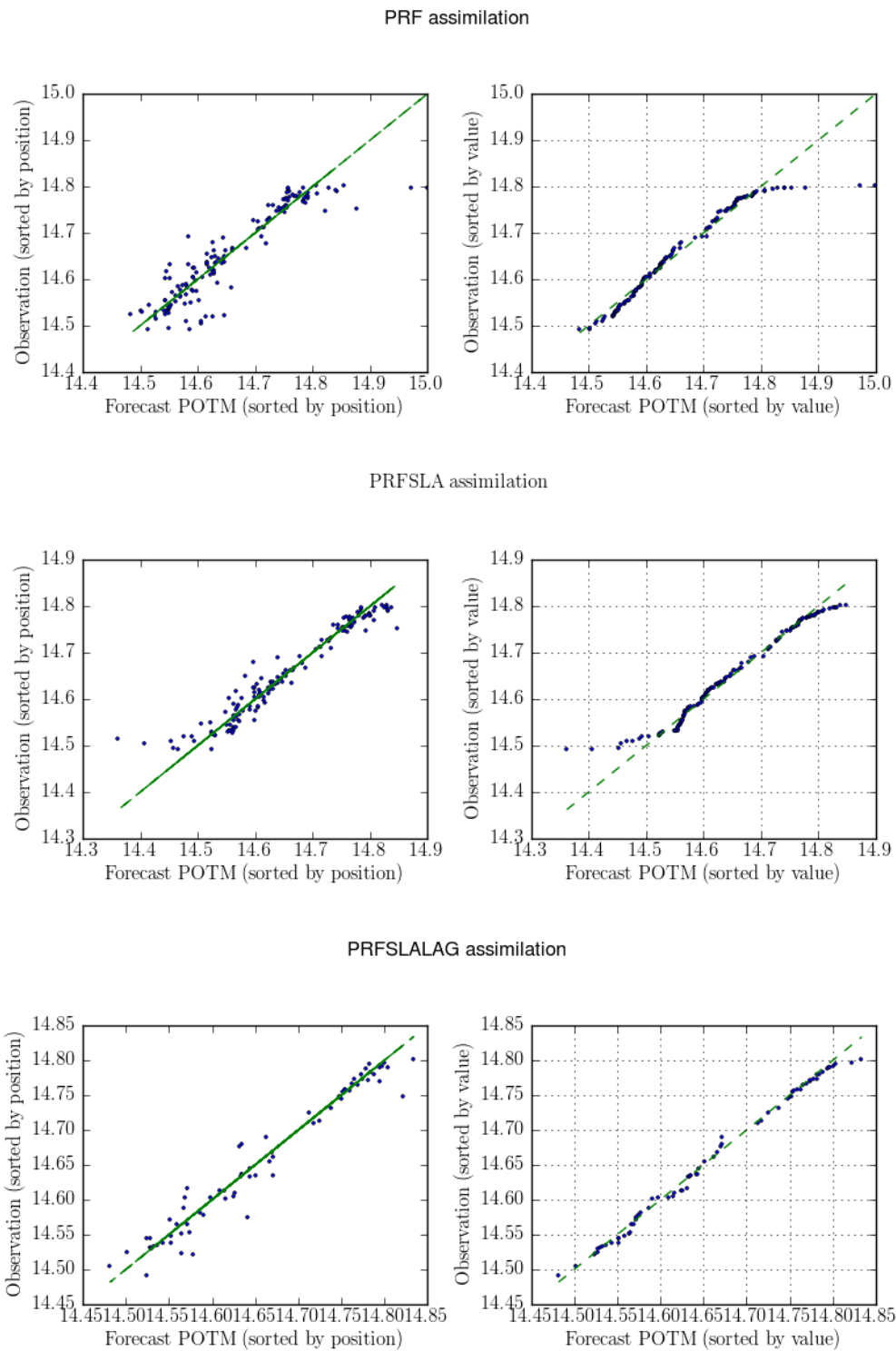


FIGURE 1.29 – Diagrammes statistiques pour la température des profils, pour les différentes expériences d’assimilation (en ligne : profils seuls en haut, avec hauteur d’eau au milieu, et en ajoutant les observations lagrangiennes en bas). A gauche, le nuage des points température observée / température prédite, pour chaque point de mesure de profil. A droite, diagramme quantile-quantile pour les températures observées / prédites.

leur (en ordonnée) et la prévision de température de ce même profileur (en abscisse). La proximité avec la droite d'équation $y = x$ montre la fiabilité de la prédiction par rapport aux observations associées. Dans la colonne de gauche, on dessine un diagramme quantile-quantile (QQ plot). Pour cela on classe par ordre croissant toutes les observations de température, puis toutes les température prévues aux mêmes points. Ensuite on associe la plus petite température observée à la plus petite prédite et on dessine le point sur le graphe. On procède de même pour la deuxième plus petite valeur et ainsi de suite. Cela revient à dessiner les quantiles de la distribution observée en fonction de ceux de la distribution prédite. La proximité à la droite $y = x$ montre l'adéquation entre les deux distributions. Pour ce type de diagnostic on a pu voir l'avantage de l'assimilation des données lagrangiennes : l'adéquation observation/prévision est meilleure avec l'ajout des positions lagrangiennes, en particulier pour les extrêmes valeurs de la température. Cependant, le document présente les mêmes diagrammes pour les valeurs de η et celles-ci sont au contraire dégradées par l'assimilation des observations lagrangiennes.

Ces résultats en demi-teinte font que nous avons renoncé à essayer d'appliquer cette méthode à des données réelles et que j'ai mis de côté cette direction de recherche pour le moment.

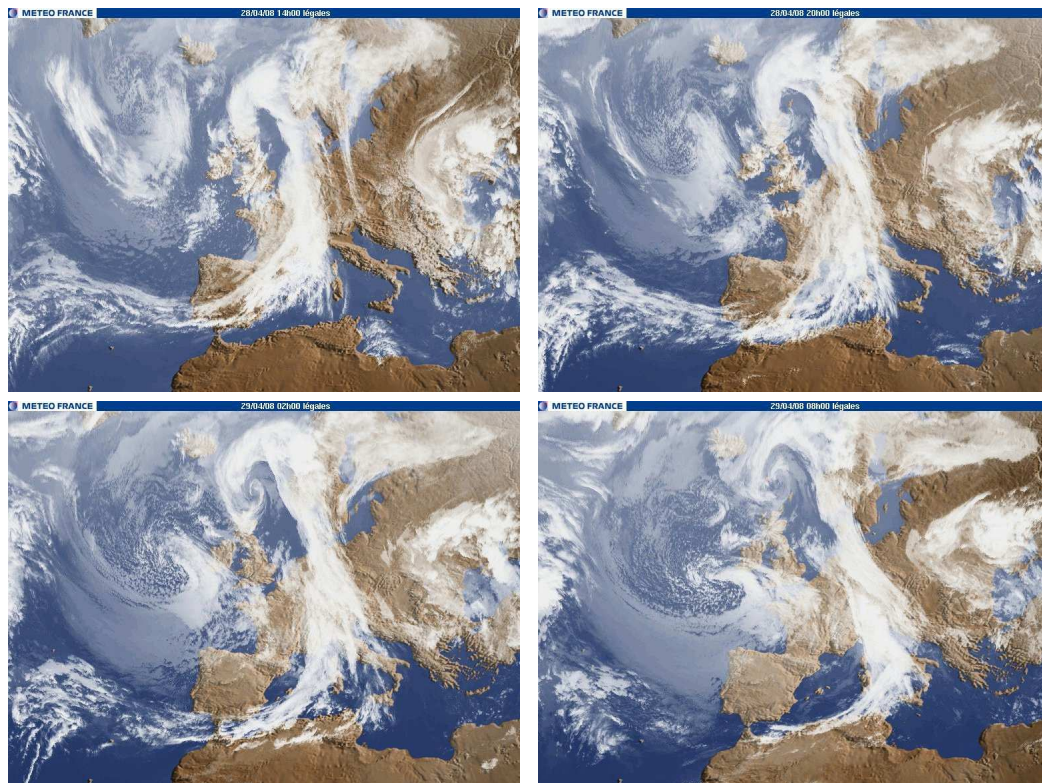


FIGURE 1.30 – Séquence Meteosat, avril 2008, 6h entre chaque image (source : MétéoFrance).

1.4 Assimilation de séquences d'images

L'assimilation de séquences d'images est très proche conceptuellement de l'assimilation lagrangienne, comme on va le voir ci-dessous, je m'y suis donc intéressée naturellement en arrivant dans l'équipe MOISE, où A. Vidard, F.-X. Le Dimet et leurs (post-)doctorants (O. Titaud, I. Souopgui) travaillaient déjà sur le sujet. Ce paragraphe présente d'abord les spécificités des images et fait le point sur l'état de l'art de l'assimilation dans ce domaine, en particulier les travaux antérieurs dans l'équipe MOISE. Enfin, je présente les travaux en cours [23] dans le cadre de la thèse de V. Chabot, que je co-encadre avec A. Vidard (ainsi que les papiers de conférences [19] et [20], avec N. Papadakis et A. Makris).

1.4.1 Séquences d'images : intérêts et difficultés

Les séquences d'images sont un type particulier d'observations, que l'on utilise (ou voudrait utiliser) en assimilation de données dans différents domaines : météorologie, océanographie, mais aussi glaciologie, agronomie, sismologie, biologie, médecine, etc. Le travail que l'on présente dans [19], [20] et [23] est destiné à la météorologie et à l'océanographie, donc les exemples sont restreints à ces domaines.

Les séquences d'images ont à la fois des avantages et des inconvénients si on veut les utiliser en assimilation de données.

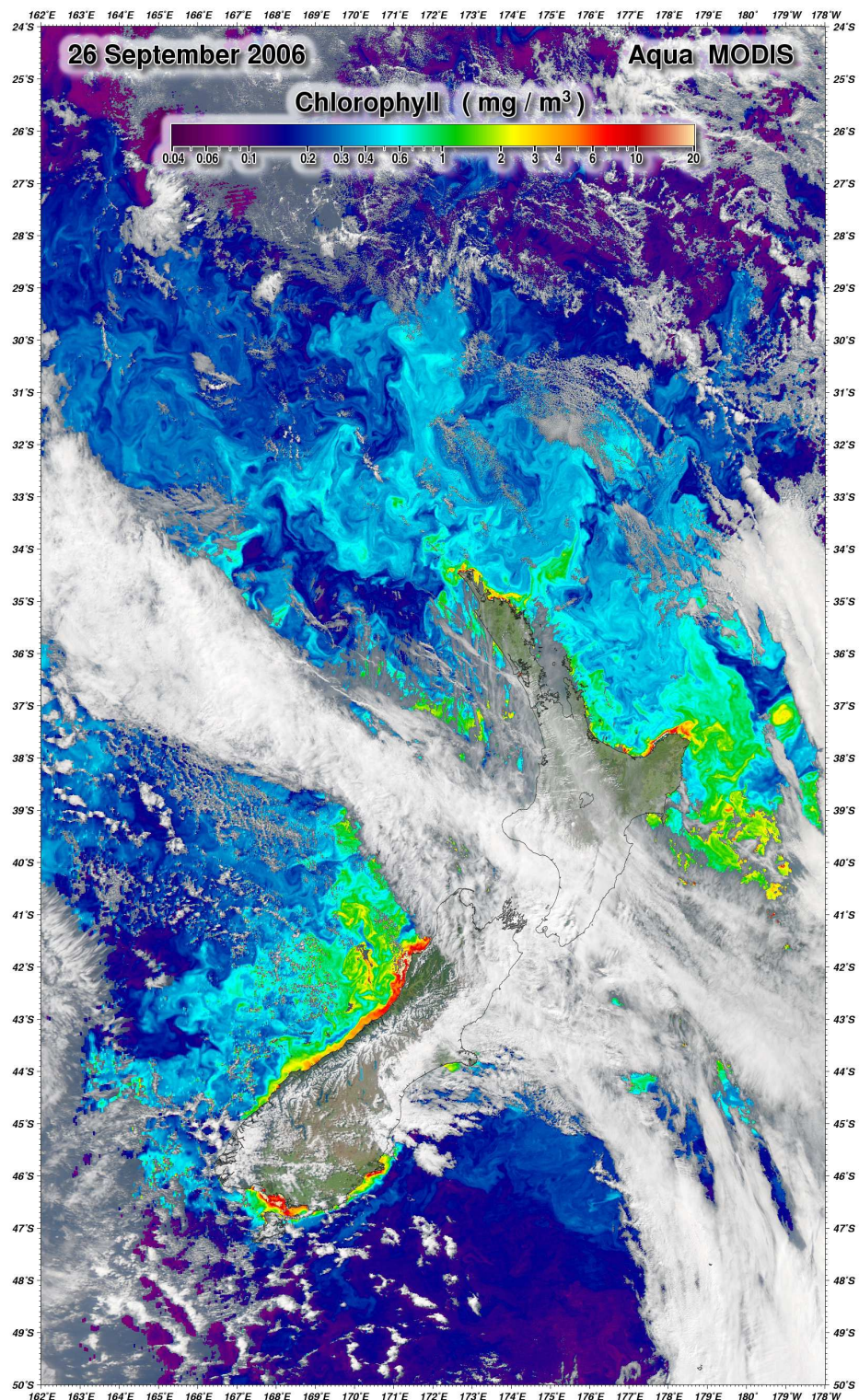


FIGURE 1.31 – New Zealand Eddies. (source : image MODIS)

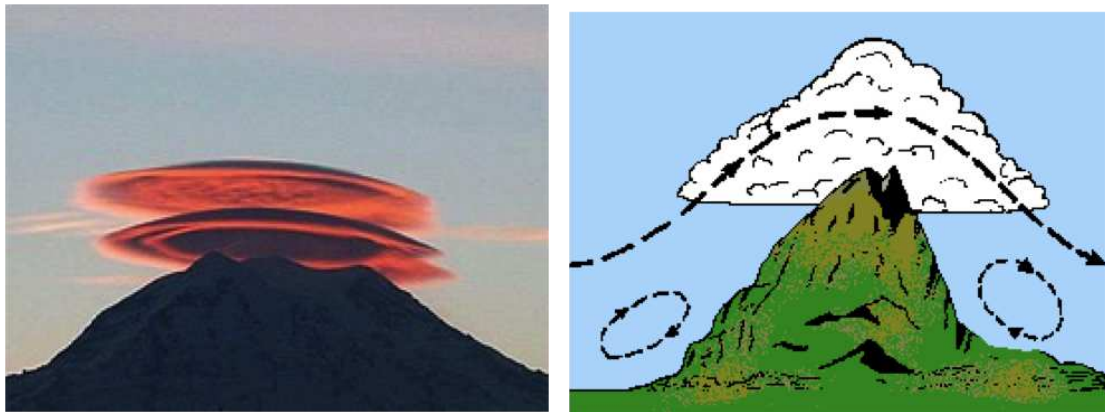


FIGURE 1.32 – Nuage lenticulaire. Le nuage semble stationnaire au dessus de la montagne, tandis qu'en réalité il y a un fort vent horizontal là où il se trouve.

Un gros potentiel informatif, mais difficilement exploitable. Du côté des avantages, ce sont des données qui manifestement ont un grand potentiel informatif. Il suffit pour s'en convaincre de regarder la figure 1.30, qui présente une séquence de quatre images Meteosat successives (espacées de six heures) : on y voit clairement le déplacement de fronts, et un prévisionniste averti peut tirer de cette séquence des informations précieuses.

Cependant, il est difficile d'utiliser ces images telles quelles dans les systèmes de prévision environnementaux. En effet, ce ne sont pas toujours des variables d'état du modèle, tout comme les données lagrangiennes. Ce sont un reflet 2D de processus 3D impliquant d'autres variables (traceur passif ou actif : humidité, température, chlorophylle, etc.), et cela nécessite donc des opérateurs d'observations complexes, incluant la résolution d'équations aux dérivées partielles (comme pour les observations lagrangiennes).

De plus, comme pour les observations lagrangiennes, les images sont le reflet de processus multi-échelle, et en particulier de processus de petite échelle, qui ne sont pas résolus par le modèle.

Une grande quantité de données, mais de qualité discutable. Les satellites fournissent chaque jour une grande quantité d'images, que ce soient des satellites géostationnaires ou à orbite polaire. Cependant, les images produites sont composites, c'est-à-dire qu'elles sont la combinaison de plusieurs clichés. Par exemple, MeteoSat met quinze minutes pour produire une image cliché par cliché. L'image composite obtenue est donc bien homogène en terme de date. A l'opposé, les images de hauteur de l'océan sont produites par un satellite à orbite polaire qui peut mettre plusieurs jours pour couvrir une zone donnée. L'image composite obtenue contient donc des images produites à des instants différents. On voit facilement que ceci peut poser des problèmes en assimilation, avec des inconsistances à la fois dans les données et entre modèle et données, dont les dates ne correspondent pas.

De plus, et notamment en océanographie, il y a souvent des “trous” dans les images, à cause de l'occultation par les nuages, comme on peut le voir sur la figure 1.31 de chlorophylle autour de la Nouvelle-Zélande.

En météo, la détermination de l'altitude des nuages à partir d'images 2D est également un sujet de discussion.

Un autre problème commun à la météo et à l'océano est celui de l'aliasing (repli de spectre en français). L'aliasing est le fait que le mouvement apparent donné par les images peut être très différent du mouvement réel. On peut penser par exemple au mouvement d'une roue de voiture dans une capture cinématographique à 24 images par seconde. Un autre exemple est celui des nuages lenticulaires, dont l'immobilité contraste avec le fort vent horizontal, voir la figure 1.32.

1.4.2 Rappel des travaux antérieurs

Pseudo-observations

Actuellement, les données ne sont pas utilisées directement dans les systèmes de prévision météo, mais elles sont transformées en une information (appelée pseudo-observation) pouvant être exploitée en assimilation de données. On explique brièvement ci-dessous de quoi il s'agit, et on renvoie à Vidard (2012); Souopgui (2010) pour plus de détails et de références sur le sujet.

Bogus. La plus simple des méthodes consiste à suivre des structures dans la séquence d'images, et à les assimiler comme des données de position dans le modèle. Historiquement fait à la main, ce suivi de structures connaît maintenant des automatisations (Michel and Bouttier, 2006), appliqué à la vorticité potentielle dans Michel (2011). De la même manière, Thomas et al. (2010) procèdent au suivi de cellules convectives par méthode level set.

Atmospheric Motion Vectors (AMV). D'autres façon de créer des pseudo-observations consistent à utiliser la séquence d'images pour en déduire un champ de vitesse apparente, qui pourra être ensuite assimilé, voir par exemple Schmetz et al. (1993). L'idée est similaire à celle de la PIV (Particle Image Velocimetry, voir Wikipedia pour une introduction et Adrian (1991) pour l'article de référence). L'idée est de mettre des particules dans le fluide, qui seront visibles sur les images. Ensuite, il s'agit d'identifier chaque particule et de la suivre dans la séquence d'images pour obtenir un vecteur vitesse. Ceci se fait par une méthode statistique de corrélation-croisée, afin de chercher quelle particule correspond à celle recherchée dans les images. Les AMV sont obtenus de la même manière, les nuages atmosphériques jouant alors le jeu de particules dans le flot.

Flot optique. Le flot optique est une autre gamme de méthodes pour identifier un champ de vitesse apparente. L'idée est de chercher un champ de vecteur w qui déplace les images tout en conservant la luminosité I (Horn and Schunck, 1981) :

$$\partial_t I + \nabla I \cdot w = 0, \quad I(0) = I_0 \quad (1.20)$$

Comme cette hypothèse de luminosité constante ne fournit qu'une seule équation scalaire et que l'on cherche un vecteur déplacement, le problème du flot optique admet une infinité de solutions (problème d'ouverture) et doit donc être régularisé, voir par exemple Auroux and Fehrenbach (2010) pour une comparaison des régularisations. On peut aussi citer Corpetti et al. (2002) qui interprètent l'équation de conservation de la luminosité comme une équation de continuité dans un fluide, et qui donne de meilleurs résultats pour des images issus de fluides.

Modèle image. Comme le flot optique fournit un champ de vecteur *entre deux images successives*, on n'a pas forcément de cohérence dans le temps du champ de vitesse obtenu. L'idée du modèle image (Herlin et al., 2006) est d'ajouter à l'équation du flot optique un modèle d'évolution pour w :

$$\partial_t w = \mathcal{M}(w), \quad w(t=0) = w_0 \quad (1.21)$$

où \mathcal{M} est un modèle dynamique 2D simplifié pour l'évolution de w . Ensuite on minimise la fonction coût :

$$\mathcal{J}(w_0) = \|I - I^{\text{obs}}\|^2 + \text{régularisation}$$

sous les contraintes (1.20,1.21).

Assimilation directe

L'assimilation de pseudo-observations présente l'avantage d'être relativement facile à mettre en place dans un système d'assimilation existant. Le problème est que la création des pseudo-observations par la transformation des images ajoute des erreurs que l'on maîtrise mal et qui sont en général corrélées en espace.

On voudrait donc éviter le recours aux pseudo-observations, et assimiler les images directement en utilisant un opérateur d'observation adéquat. Dans le formalisme du 4D-Var, cela revient à minimiser une fonction coût $\mathcal{J} = \mathcal{J}^o + \mathcal{J}^b$ composée d'un terme d'observation et d'un terme d'ébauche, sous la contrainte des équations du modèle fluide.

Pixels. La première idée pour construire l'opérateur d'observation est d'utiliser simplement

$$\mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) = \sum_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(t) - \mathbf{y}^o(t)\|_{\mathbf{R}_{pix}}^2$$

où \mathbf{y}^o est le vecteur contenant la valeur de la luminosité de l'image et \mathbf{R}_{pix} la matrice de covariance d'erreur d'observation. La taille de \mathbf{y}^o est donc égal au nombre de pixels de l'image. L'opérateur d'observation contient alors la fabrication de l'image à partir des variables d'état du modèle. Pour nous, cela consiste à considérer la densité q d'un traceur transporté par le fluide :

$$\partial_t q + \nabla q \cdot \mathbf{U} - \nu \Delta q, \quad q(t_0) = q_0 \quad (1.22)$$

où \mathbf{U} est le champ de vitesse 2D au niveau de l'image, ν est le coefficient de diffusion choisi, et q_0 est la concentration initiale (obtenue par exemple grâce à la première image). Par exemple, la figure 1.33 présente une comparaison entre une observation et une image générée de la sorte par le modèle.

Pour les premiers travaux sur le sujet, on peut citer Huot et al. (2010) et Papadakis and Mémin (2008) (avec un opérateur d'observation différent de celui mentionné ci-dessus, basé sur l'équation du flot optique). Cette dernière étude a montré que l'assimilation directe donnait de meilleurs résultats (dans un cas simple de flot 2D) que l'utilisation de pseudo-observations de flot optique. Cependant, ce type de comparaison "pixel à pixel" entre le modèle et l'image semble peu adaptée, car elle ne tient pas du tout compte des structures dans l'image. Ainsi, d'autres approches directes ont été mises en place, qui tentent d'extraire les informations pertinentes dans les images.

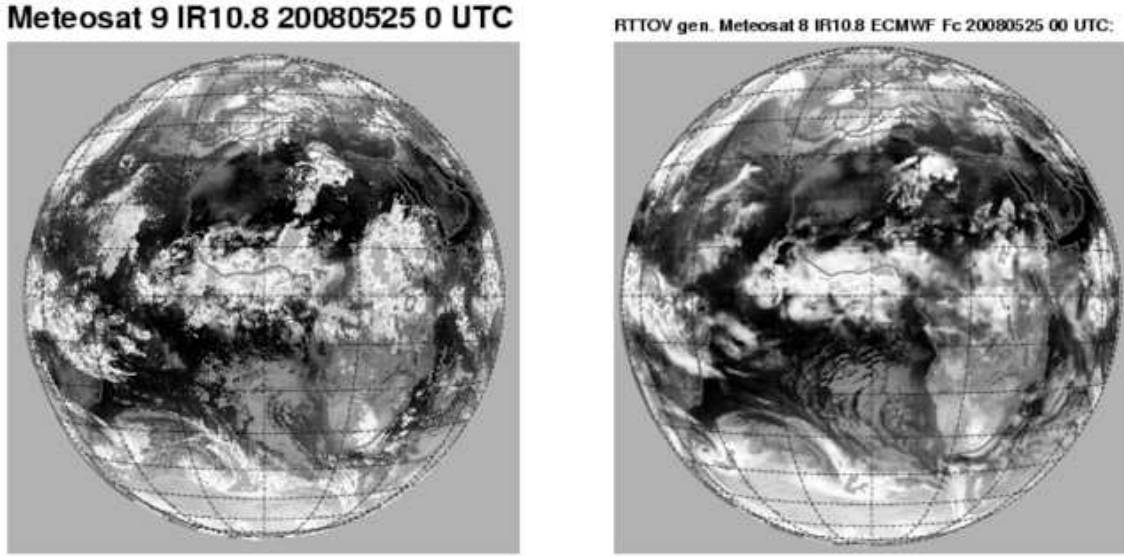


FIGURE 1.33 – Comparaison modèle données. A gauche, données Meteosat, à droite sortie équivalente du modèle de l'ECMWF (source : ECMWF).

Décomposition multi-échelle. La première approche est celle de Titaud et al. (2010); Souopgui (2010), qui consiste à décomposer l'image dans une base multi-échelle de curvelettes (Candes and Donoho, 2000; Candes et al., 2006) ou d'ondelettes (Mallat, 1998) et de comparer les décompositions multi-échelles de l'image et du modèle. La fonction coût s'écrit alors

$$\mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) = \sum_{t_0}^{t_f} \|W(q(t)) - W(\mathbf{y}^o(t))\|_{R_{wav}}^2$$

où W est la transformée en ondelettes choisie.

Comme ces décompositions multi-échelles vérifient une égalité de type Parseval, la distance multi-échelle est équivalente à la distance pixel. L'idée des travaux ci-dessus est de ne garder qu'une partie des coefficients. Ceci s'appelle le seuillage, et consiste à ne garder que les coefficients principaux, selon une règle à déterminer (par exemple les 5% coefficients les plus importants de l'image, ou encore les 5% principaux à chaque échelle, etc.). Souopgui (2010) a montré que le choix du seuillage était crucial dans l'assimilation d'images multi-échelles. La fonction coût s'écrit dans ce cas

$$\mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) = \sum_{t_0}^{t_f} \|\mathbb{1}_{\Omega_I} \circ W(q(t)) - \tau \circ W(\mathbf{y}^o(t))\|_{R_{wav}}^2$$

où τ est le seuillage appliqué aux coefficients de l'image observée. Ceci permet de définir un espace de travail Ω_I sur lequel on projette l'image issue du modèle, en vue de la comparer à l'observation. Dans notre étude, le seuillage consiste à supprimer les plus petits coefficients.

Autre approche. Une autre façon d'extraire de l'information relative aux structures de l'image a été explorée dans Titaud et al. (2011), qui fabriquent une carte de Structures Lagrangiennes Cohérentes (LCS en anglais), liées aux exposants de Lyapunov du fluide (voir Vidard (2012) pour une revue).

1.4.3 Travaux en cours

Le modèle utilisé est un code Shallow-Water en fortran 90, associé à la bibliothèque d'assimilation d'images BALAISE (Souopgui, 2010), que nous enrichissons avec les méthodes et opérateurs présentés ci-dessous.

Opérateurs d'observation pour les images basés sur les gradients

Le constat de départ de cette étude est le suivant : les informations pertinentes de l'image sont contenues dans les fronts, autrement dit les zones de fort gradient dans l'image. Ainsi, on propose dans [23] de considérer deux opérateurs d'observation basés sur les gradients.

Opérateur gradient. Le premier opérateur calcule simplement les gradients de l'image, il donne la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}^{\text{grad}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\nabla I_i - \nabla q_i\|_{R_i^{-1}}^2$$

où $(I_i)_{i=1..N}$ est la séquence d'images observée, et $(q_i)_{i=1..N}$ le traceur défini par l'équation 1.22 (discrétisée), où \mathbf{U} est donné par le modèle fluide initialisé par \mathbf{x}_0 .

Opérateur angulaire. Pour le second opérateur, on voudrait pouvoir mesurer l'écart angulaire entre les gradients de l'image et ceux produits par le modèle. Pour cela on souhaite comparer les vecteurs unitaires $\nabla I / \|\nabla I\|$ et $\nabla q / \|\nabla q\|$. Ici $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne en deux dimensions, de sorte qu'en chaque pixel (x_k, y_k) de l'image on peut définir le vecteur unitaire ainsi :

$$\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}(x_k, y_k) = \frac{1}{\sqrt{\partial_x I(x_k, y_k)^2 + \partial_y I(x_k, y_k)^2}} (\partial_x I(x_k, y_k), \partial_y I(x_k, y_k))$$

où la dérivée ∂_x, ∂_y est calculée par différences finies au pixel voulu. Bien sûr, cette formule pose problème lorsque ∇I s'annule, on remplace donc la norme $\|\cdot\|$ par $\|\cdot\|_\varepsilon$, avec

$$\|a\|_\varepsilon^2 = a_x^2 + a_y^2 + \varepsilon$$

où ε est bien choisi (voir [23] pour les détails), de manière à garantir que $\nabla I / \|\nabla I\|_\varepsilon$ est soit nul soit proche de $\nabla I / \|\nabla I\|$. La fonction coût est alors donnée par :

$$\mathcal{J}^{\text{ang}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|_\varepsilon} - \frac{\nabla q}{\|\nabla q\|_\varepsilon} \right\|_{R_i^{-1}}^2 dt$$

Validation avec des données parfaites

La pertinence de ces deux opérateurs est étudiée dans le cadre d'expériences jumelles avec des données parfaites (non bruitées). Les conditions expérimentales sont celles de la plaque expérimentale Coriolis¹³, autrement dit un modèle Shallow-Water avec une force

13. <http://coriolis.legi.grenoble-inp.fr>

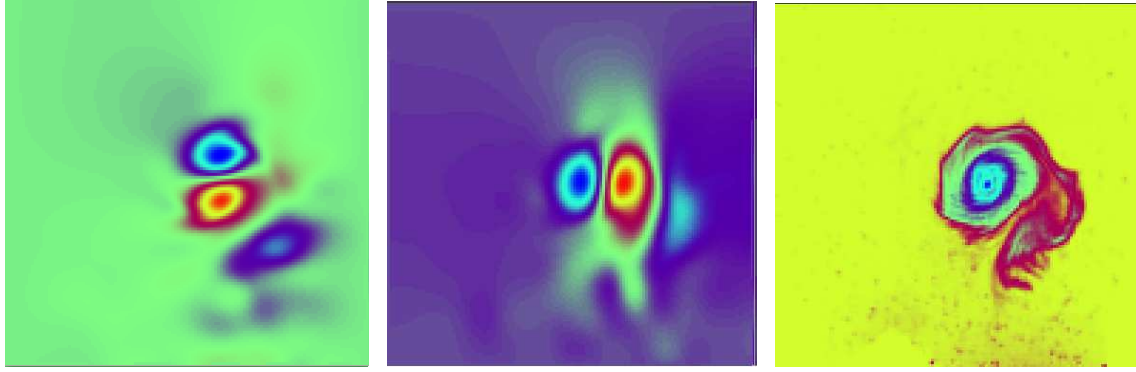


FIGURE 1.34 – Valeurs initiales choisies pour les expériences jumelles : à gauche et au centre les “vraies” composantes zonale u_0 et meridionale v_0 du champ de vitesse initiale. A droite, la première image du champ de traceur passif q_1 .

de Coriolis en β -plan, ie $f = f_0 + \beta y$ (où y est la latitude et f la force de Coriolis). Les variables d'état du modèle sont les vitesses horizontales $\mathbf{U} = (u, v)$ et la hauteur d'eau h , ce sont également les variables de contrôle, autrement dit les variables que l'on cherche à identifier par assimilation. La simulation est réalisée sur un domaine carré (un sous-domaine de la plaque), la figure 1.34 montre les vitesses initiales, le champ de traceur initial et la vorticité initiale $\zeta_0 = \partial_x v_0 - \partial_y u_0$. Ces valeurs initiales permettent de générer des observations, qui sont ensuite utilisées dans le système d'assimilation avec les différents opérateurs. Pour valider quantitativement chaque système, on calcule le rapport suivant :

$$\frac{RMSE(x_0^a)}{RMSE(x_0^b)}, \text{ avec } RMSE(x) = \|x - x^t\|$$

en prenant pour x successivement chaque variable u_0, v_0, h_0 (avec les exposants a pour assimilé, b pour ébauche et t pour vrai). La figure 1.35 présente l'évolution de ce rapport RMSE pour u_0 au fur et à mesure des itérations de minimisation. On voit ainsi que tous les opérateurs implémentés permettent de réduire l'erreur RMSE à moins de 10% de l'erreur de l'ébauche (sans assimilation), et que l'opérateur angulaire est plus efficace que les autres.

Assimilation d'images en présence de bruit

Comme le travail [23] sur ce sujet est encore en cours à l'heure de la rédaction de ce manuscrit, je ne rentre pas trop dans les détails et je présente ici les résultats préliminaires contenus dans [20]. L'idée de ce travail est de considérer l'assimilation d'images bruitées par un bruit additif gaussien corrélé en espace. Du coup, la matrice de covariance d'erreur d'observation ne peut plus être choisie proportionnelle à l'identité comme on le fait en général.

Images bruitées. Trois niveaux de bruit sont considérés, et les images bruitées obtenues sont présentées à la figure 1.36. Pour ces images, la matrice de corrélation du bruit est identique, seule change l'intensité du bruit, qui est quantifiée par le SNR (Signal to Noise Ratio) :

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega} (I^t(\mathbf{x}))^2}{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega} (I^t(\mathbf{x}) - I^o(\mathbf{x}))^2} \right)$$

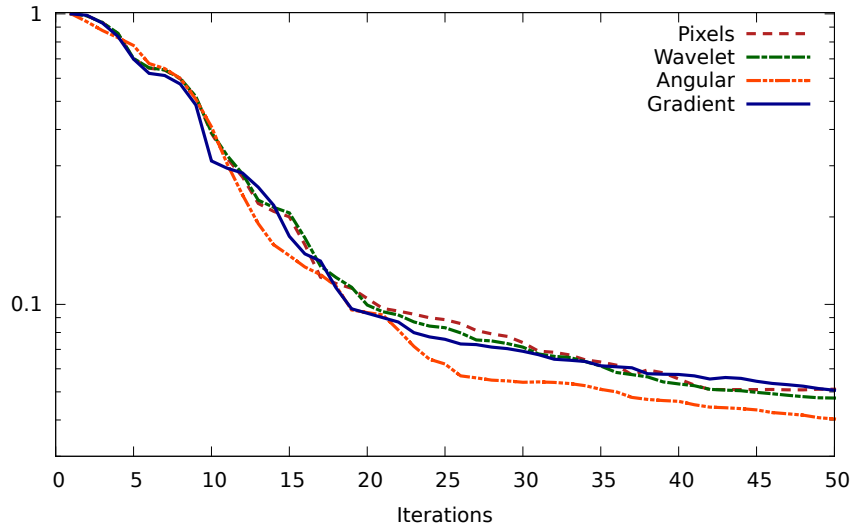


FIGURE 1.35 – Evolution du rapport des erreurs RMS pour la vitesse u en fonction du nombre d'itérations de 4D-Var. Les observations sont parfaites et les quatre opérateurs d'observations sont comparés.

Modélisation des matrices de covariance d'erreur d'observation. On appelle \mathbf{R}_{pix}^t la véritable matrice de covariance d'erreur d'observation dans l'espace des pixels. Le bruit étant corrélé en espace cette matrice n'est pas diagonale. Comme le niveau de bruit est homogène dans l'image, sa diagonale est constante, égale à σ_{true}^2 .

Dans les expériences préliminaires de [20], on ne considère que des matrices \mathbf{R} diagonales, et on compare les différents couples opérateur d'observation / matrice \mathbf{R} suivants :

- *Pixels*. On choisit comme matrice de covariance la diagonale de la vraie matrice :

$$\mathbf{R}_{pix} = \text{diag}(\mathbf{R}_{pix}^t) = \sigma_{true}^2 \mathbf{I}_n, \quad n = \#\text{pixels}$$

- *Ondelettes avec seuillage*. On choisit ensuite de quantifier l'effet du seuillage τ par rapport à la distance précédente. Pour cela on prend la matrice \mathbf{R}_{pix} (qui est donc diagonale) et on la transporte dans l'espace des ondelettes (de Daubechies pour fixer les idées) seuillées. On obtient :

$$\mathbf{R}_{W_\tau} = \tau W_{D8} \text{diag}(\mathbf{R}_{pix}^t) W_{D8}^T \tau^T = \sigma_{true}^2 \mathbf{I}_k, \quad k = \#\Omega_I$$

où l'identité agit sur l'espace seuillé Ω_I . On voit alors que s'il n'y a pas de seuillage on retrouve exactement la distance pixel. Ce choix de matrice permet donc d'évaluer l'impact du seuillage dans la distance, pour une matrice diagonale dans l'espace des pixels.

- *Gradients*. La vraie matrice dans l'espace des gradients est $\nabla \mathbf{R}_{pix}^t \nabla^T$, on prend sa diagonale pour nos expériences :

$$\mathbf{R}_{grad} = \text{diag}(\nabla \mathbf{R}_{pix}^t \nabla^T)$$

Comme les corrélations utilisées sont isotropes, cette matrice est elle aussi proportionnelle à l'identité.

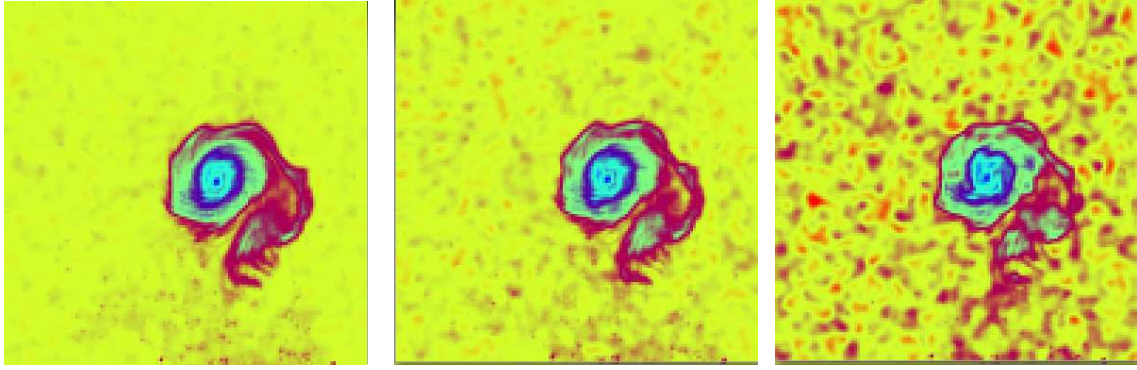


FIGURE 1.36 – Exemples d'observations bruitées pour chaque niveau de bruit étudié. Le ratio Signal/Bruit (SNR) de l'image de gauche est de 26.8 dB, celui de l'image centrale de 20.8 dB et celui de l'image de droite de 14.8 dB.

TABLE 1.1 – Moyenne sur 10 expériences du pourcentage de l'erreur résiduelle dans la composante analysée, u_0^a , par rapport à l'erreur présente dans l'ébauche, u_0^b . Ce pourcentage a été calculé pour différents niveaux de bruit, caractérisés par leur ratio Signal Bruit (SNR), présent au sein des séquences d'images.

	Pixels	W_τ	Gradients	D8	Haar
14.8 dB	60.8%	60.1%	34.0%	9.3%	22.8%
20.8 dB	26.2%	28.5%	17.8%	7.6%	12.5%
26.8 dB	15.6%	17.1%	12.4%	7.2%	8.4%
Perfect data	7.6%	8.5%	7.4%	7.1%	6.4%

- *Ondelettes de Haar sans seuillage.* La vraie matrice de covariance est $W_{Haar} \mathbf{R}_{pix}^t W_{Haar}^T$, on prend sa diagonale :

$$\mathbf{R}_{Haar} = \text{diag}(W_{Haar} \mathbf{R}_{pix}^t W_{Haar}^T)$$

- *Ondelettes de Daubechies sans seuillage.* Enfin, sans seuillage, on choisit la matrice suivante :

$$\mathbf{R}_{D8} = \text{diag}(W_{D8} \mathbf{R}_{pix}^t W_{D8}^T)$$

qui est la diagonale de la vraie matrice dans l'espace des ondelettes D8.

Remarquons que si on se ramène à l'espace des pixels par changement de variable, les trois dernières \mathbf{R} produisent des matrices de covariance non diagonales. A contrario, les deux premières font l'hypothèse que le bruit est décorrélié dans l'espace des pixels.

Remarquons également qu'il aurait été souhaitable de pouvoir comparer l'effet du seuillage avec une matrice non scalaire, par exemple en prenant

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\tau W_{D8} \mathbf{R}_{pix}^t W_{D8}^T \tau^T)$$

mais ceci est encore en cours de développement à l'heure actuelle.

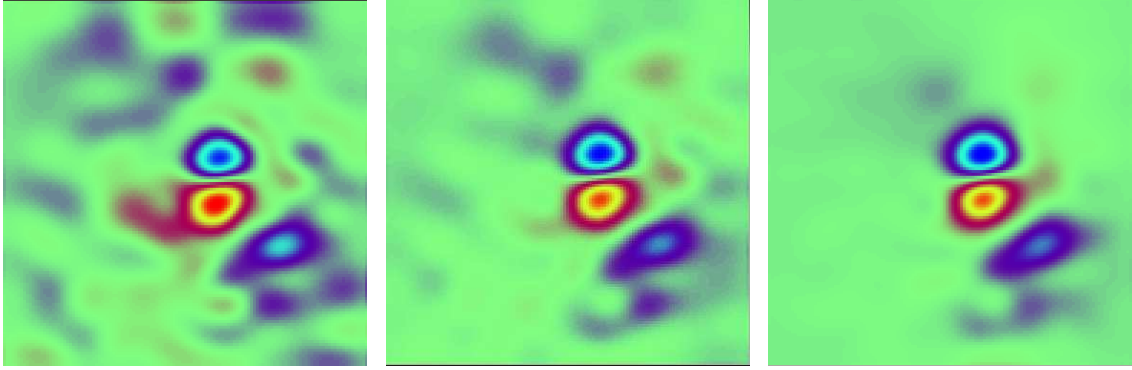


FIGURE 1.37 – Composante u du champ de vitesse analysé pour une séquence d'observation correspondant au bruit fort (SNR 14.8 dB). À gauche est présenté le résultat d'une assimilation basée sur la distance entre pixel, au centre sur la distance entre gradients, à droite sur la distance entre les coefficients d'ondelettes de Daubechies.

Résultats. La table 1.1 présente le ratio entre les erreurs RMS pour l'analyse et celle pour l'ébauche, pour différents niveaux de bruit et les différents choix de distances/matrices présentés plus haut. On remarque tout d'abord que la distance pixels est très sensible au bruit. Ensuite, on voit que l'influence du seuillage seul est moindre, puisque le même genre de résultat est atteint pour W_τ . Pour un grand niveau de bruit les meilleurs résultats sont atteints pour les gradients et les ondelettes de Haar et Daubechies non seuillées. Ceci permet d'affirmer qu'une matrice diagonale bien choisie donne de meilleurs résultats que l'identité.

Enfin, la figure 1.37 montre le champ de vitesse u analysé avec un fort bruit dans les images, pour pixels, gradients, et D8, qui confirme la bonne performance des deux derniers par rapport aux pixels.

Ceci est certes préliminaire, puisque les matrices considérées sont toutes diagonales, mais la grande variabilité des résultats vis à vis du choix de la matrice est encourageante et montre que les efforts de modélisation de \mathbf{R} , même modestes, peuvent être payants.

1.5 Bibliographie du chapitre 1

- R. Adrian. Particle imaging techniques for experimental uid mechanics. *Annal Rev. Fluid Mech.*, 23 :261304, 1991.
- Jeffrey L Anderson and Stephen L Anderson. A monte carlo implementation of the nonlinear filtering problem to produce ensemble assimilations and forecasts. *Monthly Weather Review*, 127(12) :2741–2758, 1999.
- R. J. Arthern and R. C. A. Hindmarsh. Optimal estimation of changes in the mass of ice sheets. *Journal of Geophysical Research*, 108 :6007, 2003.
- Robert J Arthern and G H Gudmundsson. Initialization of ice-sheet forecasts viewed as an inverse Robin problem. *Journal of Glaciology*, 56(197) :527–533, 2010.
- Robert J Arthern and R C A Hindmarsh. Determining the contribution of Antarctica to sea-level rise using data assimilation methods. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1844) :1841–1865, July 2006.
- Didier Aurox and Jérôme Fehrenbach. Identification of velocity fields for geophysical fluids from a sequence of images. *Experiments in Fluids*, 50(2) :313–328, July 2010.
- J. L. Bamber, R. L. Layberry, and S. P. Gogineni. A new ice thickness and bed data set for the greenland ice sheet 1. measurement, data reduction, and errors. *J. Geophys. Res.*, 106 :33773–33780, 2001.
- J N Bassis. Hamilton-type principles applied to ice-sheet dynamics : new approximations for large-scale ice-sheet flow. *Journal of Glaciology*, 56(197) :497–513, 2010.
- L Berliner, K. Jezek, N. Cressie, Y. Kim, C. Q. Lam, and C. J. van der Veen. Modeling dynamic controls on ice streams : a Bayesian statistical approach. *Journal of Glaciology*, 54(1) :705–714, 2008.
- R. Bindshadler, W. D. Harrison, C. F. Raymond, and R. Crosson. Geometry and dynamics of a surge-type glacier. *J. Glaciol.*, 18 :181194, 1977.
- Richard Bintanja, Roderik S W van de Wal, and Johannes Oerlemans. A new method to estimate ice age temperatures. *Clim Dyn*, 24(2-3) :197–211, December 2004.
- Richard Bintanja, Roderik S W van de Wal, and Johannes Oerlemans. Modelled atmospheric temperatures and global sea levels over the past million years. *Nature*, 437(7055) :125–128, September 2005.
- Craig H. Bishop, Brian J. Etherton, and Sharanya J. Majumdar. Adaptive sampling with the ensemble transform kalman filter. part i : Theoretical aspects. *Monthly Weather Review*, 129 :420–436, 2001.
- Marc Bocquet. Ensemble kalman filtering without the intrinsic need for inflation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18(5) :735–750, 2011.

- Bertrand Bonan. *Assimilation de données pour l'initialisation et l'estimation de paramètres d'un modèle d'évolution de calotte polaire*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2013. en préparation.
- Pierre Brasseur, P Bahurel, L Bertino, F Birol, J-M Brankart, N Ferry, S Losa, Elisabeth Rémy, Jens Schröter, Sergey Skachko, et al. Data assimilation for marine monitoring and prediction : The mercator operational assimilation systems and the mersea developments. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 131(613) :3561–3582, 2005.
- D. Buiron, J. Chappellaz, B. Stenni, M. Frezzotti, M. Baumgartner, E. Capron, A. Landais, Bénédicte Lemieux-Dudon, V. Masson-Delmotte, M. Montagnat, F. Parrenin, and A. Schilt. TALDICE-1 age scale of the Talos Dome deep ice core, East Antarctica. *Climate of the Past*, 7(1) :1–16, January 2011. doi : 10.5194/cp-7-1-2011. URL <http://hal-insu.archives-ouvertes.fr/insu-00649642>.
- Gerrit Burgers, Peter Jan van Leeuwen, and Geir Evensen. Analysis scheme in the ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review*, 126 :1719–1724, 1998.
- Emmanuel Candes, Laurent Demanet, David Donoho, and Lexing Ying. Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(3) :861–899, 2006.
- Emmanuel J Candes and David L Donoho. Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges. Technical report, DTIC Document, 2000.
- S Chaabane and M Jaoua. Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements. *Inverse Problems*, 15 :1425, 1999.
- Y. Chang, D. Hammond, A.C. Haza, P. Hogan, H.S. Huntley, A.D. Kirwan Jr., B.L. Lipphardt Jr., V. Taillandier, A. Griffa, and T.M. Özgökmen. Enhanced estimation of sonobuoy trajectories by velocity reconstruction with near-surface drifters. *Ocean Modelling*, (36) :179–197, 2011.
- T. Corpetti, E. Mmin, and P. Prez. Dense motion analysis in uid imagery. page 676691, 2002.
- E. Cosme, J.-M. Brankart, J. Verron, P. Brasseur, and M. Krysta. Implementation of a reduced-rank, square-root smoother for ocean data assimilation. *Ocean Modelling*, (33) : 87–100, 2010.
- K. M. Cuffey and W. S. B. Paterson. *The physics of glaciers*. Butterworth-Heinemann, 2010.
- N. Daget. Interpolation d'une grille orca2 vers une grille régulière. Technical Report TR/CMGC/06/18, CERFACS, 2006.
- Basile de Fleurian. *Développement d'un modèle d'hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers*. PhD thesis, Université de Grenoble, November 2010.
- P. Duval. Creep and recrystallization of polycrystalline ice. *Bulletin de Minéralogie*, 102 (2-3) :80–85, 1979.

- Geir Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99 : 10143–10162, 1994.
- V. Favier, C. Agosta, S. Parouty, G. Durand, G. Delaygue, H. Gallée, A.-S. Drouet, A. Trouvilliez, and G. Krinner. An updated and quality controlled surface mass balance dataset for antarctica. *The Cryosphere*, 7(2) :583–597, 2013. doi : 10.5194/tc-7-583-2013. URL <http://www.the-cryosphere.net/7/583/2013/>.
- M A Freitag, Nancy K Nichols, and C J Budd. Resolution of sharp fronts in the presence of model error in variational data assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, pages n/a–n/a, August 2012.
- P Fretwell, H D Pritchard, D J Vaughan, J L Bamber, N E Barrand, R Bell, C Bianchi, R G Bingham, D D Blankenship, G Casassa, G Catania, D Callens, H Conway, AJ Cook, H F J Corr, D Damaske, V Damm, F Ferraccioli, R Forsberg, S Fujita, Y Gim, P Gogineni, JA Griggs, R C A Hindmarsh, P Holmlund, J W Holt, R W Jacobel, A Jenkins, W Jokat, T Jordan, E C King, J Kohler, W Krabill, M Riger-Kust, K A Langley, G Leitchenkov, C Leuschen, B P Luyendyk, K Matsuoka, J Mouginot, N O Nitsche, Y Nogi, O A Nost, S V Popov, E Rignot, D M Rippin, A Rivera, J Roberts, N Ross, M J Siegert, A M Smith, D Steinhage, M Studinger, B Sun, B K Tinto, B C Welch, D Wilson, D A Young, C Xiangbin, and A Zirizzotti. Bedmap2 : improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica. *The Cryosphere*, 7 :375–393, 2013.
- P. Frey and F. Alauzet. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comput. Method Appl. M.*, 194 :5068–5082, 2005.
- M. Frezzotti, C. Scarchilli, S. Becagli, M. Proposito, and S. Urbini. A synthesis of the antarctic surface mass balance during the last 800 yr. *The Cryosphere*, 7(1) :303–319, 2013. doi : 10.5194/tc-7-303-2013. URL <http://www.the-cryosphere.net/7/303/2013/>.
- O. Gagliardini and T. Zwinger. The ismip-hom benchmark experiments performed using the finite-element code elmer. *The Cryosphere*, 2008.
- O. Gagliardini, D. Cohen, P. Raback, and T. Zwinger. Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law. *Journal of Geophysical Research (Earth Surface)*, 2007.
- O. Gagliardini, T. Zwinger, F. Gillet-Chaulet, G. Durand, L. Favier, B. de Fleurian, R. Greve, M. Malinen, C. Martín, P. Råback, J. Ruokolainen, M. Sacchetti, M. Schäfer, H. Seddik, and J. Thies. Capabilities and performance of elmer/ice, a new-generation ice sheet model. *Geoscientific Model Development*, 6(4) :1299–1318, 2013. doi : 10.5194/gmd-6-1299-2013. URL <http://www.geosci-model-dev.net/6/1299/2013/>.
- Hubert Gallée, Cécile Agosta, Luc Gentil, Vincent Favier, and Gerhard Krinner. A downscaling approach toward high-resolution surface mass balance over antarctica. *Surveys in Geophysics*, 32(4-5) :507–518, 2011. ISSN 0169-3298. doi : 10.1007/s10712-011-9125-3. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10712-011-9125-3>.
- R. Giering and T. Kaminski. Recipes for adjoint code construction. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 24(4) :437–474, 1998.

- Jean Charles Gilbert and Claude Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Math. Programming*, 45(3, (Ser. B)) :407–435, 1989. ISSN 0025-5610.
- R. Greve. Application of a polythermal three-dimensional ice sheet model to the greenland ice sheet : response to steady-state and transient climate scenarios. *J. Climate*, 10 :901–918, 1997.
- Andreas Griewank and Andrea Walther. *Evaluating derivatives : principles and techniques of algorithmic differentiation*. Siam, 2008.
- J A Griggs and J L Bamber. A new 1 km digital elevation model of antarctica derived from combined radar and laser data-part 2 : Validation and error estimates. *The Cryosphere*, 3 :113–123, 2009.
- Thomas M Hamill, Jeffrey S Whitaker, and Chris Snyder. Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble kalman filter. *Monthly Weather Review*, 129(11) :2776–2790, 2001.
- E Hanna, FJ Navarro, F Pattyn, CM Domingues, X Fettweis, ER Ivins, RJ Nicholls, C Ritz, B Smith, S Tulaczyk, PL Whitehouse, and HJ Zwally. Ice-sheet mass balance and climate change. *Nature*, 2013.
- L. Hascoët and V. Pascual. The Tapenade Automatic Differentiation tool : Principles, Model, and Specification. *ACM Transactions On Mathematical Software*, 39(3), 2013. URL <http://dx.doi.org/10.1145/2450153.2450158>.
- Laurent Hascoet and Valérie Pascual. The Tapenade Automatic Differentiation tool : principles, model, and specification. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 39(3) :20, 2013.
- Patrick Heimbach and Véronique Bugnion. Greenland ice-sheet volume sensitivity to basal, surface and initial conditions derived from an adjoint model. *Annals of Glaciology*, 50 : 67–80, October 2009.
- Isabelle Herlin, Etienne Huot, Jean-Paul Berroir, François-Xavier Le Dimet, and Gennady Korotaev. Estimation of a motion field on satellite images from a simplified ocean circulation model. In *Image Processing, 2006 IEEE International Conference on*, pages 1077–1080. IEEE, 2006.
- B. Horn and B. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185203, 1981.
- Peter L Houtekamer and Herschel L Mitchell. A sequential ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review*, 129(1) :123–137, 2001.
- Ian M Howat, Ian Joughin, and Ted A Scambos. Rapid changes in ice discharge from greenland outlet glaciers. *Science*, 315(5818) :1559–1561, 2007.
- Brian R. Hunt, Eric J. Kostelich, and Istvan Szunyogh. Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos : A local ensemble transform Kalman filter. *Physica D*, 230 :112 – 126, 2007.

- Etienne Huot, Isabelle Herlin, Nicolas Mercier, and Evgeny Plotnikov. Estimating apparent motion on satellite acquisitions with a physical dynamic model. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR'10)*, volume 1, pages 41–44, 2010.
- Kolumban Hutter. *Theoretical Glaciology : Mathematical Approaches to Geophysics*. D. Reidel, 1983.
- K. Ide, L. Kuznetsov, and C.K.R.T. Jones. Lagrangian data assimilation for a point-vortex system. *J. Turbulence*, 3(53), 2002.
- Ian Joughin, Ben E Smith, Ian M Howat, Ted Scambos, and Twila Moon. Greenland flow variability from ice-sheet-wide velocity mapping. *Journal of Glaciology*, 56(197) : 415–430, 2010.
- Barclay Kamb, C F Raymond, W D Harrison, Hermann Engelhardt, K A Echelmeyer, N Humphrey, M M Brugman, and T Pfeffer. Glacier surge mechanism : 1982–1983 surge of Variegated Glacier, Alaska. *Science*, 227(4686) :469–479, 1985.
- L. Kuznetsov, K. Ide, and C.K.R.T. Jones. A method for assimilation of lagrangian data. *Monthly Weather Review*, 131 :2247–2260, 2003.
- F.-X. Le Dimet. A general formalism of variational analysis. Technical Report 73091 22, CIMMS, Norman, Oklahoma, 1982.
- F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus Series A*, 38 :97–+, 1986.
- Bénédicte Lemieux-Dudon, Frédéric Parrenin, and Eric Blayo. A probabilistic method to construct a common and optimal chronology for an ice core. In Kaori Kidahashi, editor, *Physics of Ice Core Records*. Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers, 2008. URL <http://hal.inria.fr/inria-00344659>.
- Bénédicte Lemieux-Dudon, Eric Blayo, Jean-Robert Petit, Claire Waelbroeck, Anders Svensson, Catherine Ritz, Jean-Marc Barnola, Bianca Maria Narcisi, and Frédéric Parrenin. Consistent dating for Antarctic and Greenland ice cores. *Quaternary Science Reviews*, 29(1-2) :8–20, January 2010. doi : 10.1016/J.QUASCIREV.2009.11.010. URL <http://hal-insu.archives-ouvertes.fr/insu-00562239>.
- J. T. M. Lenaerts, M. R. van den Broeke, W. J. van de Berg, E. van Meijgaard, and P. Kuipers Munneke. A new, high-resolution surface mass balance map of antarctica (19792010) based on regional atmospheric climate modeling. *Geophysical Research Letters*, 39(4) :n/a–n/a, 2012. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/2011GL050713. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2011GL050713>.
- J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.
- Louis Lliboutry. Anisotropic, transversely isotropic nonlinear viscosity of rock ice and rheological parameters inferred from homogenization. *International journal of plasticity*, 9(5) :619–632, 1993.
- D. R. MacAyeal. The basal stress distribution of ice stream e, antarctica, inferred by control methods. *Journal of Geophysical Research*, 1992.

- D. R. MacAyeal. A tutorial on the use of control methods in ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, 1993.
- G. Madec. *NEMO ocean engine*. Note du Pole de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace (IPSL), France, no 27 issn no 1288-1619 edition, 2008.
- Gurvan Madec, Pascale Delecluse, Maurice Imbard, and Claire Lévy. OPA 8.1 ocean general circulation model reference manual. *Note du Pôle de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace*, 11, 1998.
- S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- Y Michel and F Bouttier. Automated tracking of dry intrusions on satellite water vapour imagery and model output. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 132 (620) :2257–2276, October 2006.
- Yann Michel. Displacing Potential Vorticity Structures by the Assimilation of Pseudo-Observations. *Monthly Weather Review*, 139(2) :549–565, August 2011.
- K Mogensen, MA Balmaseda, AT Weaver, M Martin, and A Vidard. NemoVar : A variational data assimilation system for the nemo ocean model. *ECMWF newsletter*, 120 : 17–22, 2009.
- A. Molcard, A.C. Poje, and T.M. Özgökmen. Directed drifter launch strategies for lagrangian data assimilation using hyperbolic trajectories. *Ocean Modelling*, 12 :268–289, 2006.
- M. Morlighem, E. Rignot, H. Seroussi, E. Larour, H. Ben Dhia, and D. Aubry. Spatial patterns of basal drag inferred using control methods from a full-stokes and simpler models for pine island glacier, west antarctica. *Geophysical Research Letters*, 2010.
- J. Nilsson, S. Dobricic, N. Pinardi, V. Taillandier, and P.M. Poulain. On the assessment of argo float trajectory assimilation in the mediterranean forecasting system. *Ocean Dynamics*, (preprint), 2011.
- J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Verlag, 1999.
- Edward Ott, Brian R Hunt, Istvan Szunyogh, Aleksey V Zimin, Eric J Kostelich, Matteo Corazza, Eugenia Kalnay, DJ Patil, and James A Yorke. A local ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation. *Tellus A*, 56(5) :415–428, 2004.
- T.M. Özgökmen, A. Griffa, L. I. Piterbarg, and A. J. Mariano. On the predictability of the lagrangian trajectories in the ocean. *J. Atmos. Ocean. Tech.*, 17(3) :366–383, 2000.
- Didier Paillard and Frédéric Parrenin. The Antarctic ice sheet and the triggering of deglaciations. *Earth and Planetary Science Letters*, 227(3-4) :263–271, November 2004.
- N. Papadakis and É. Mémin. A variational method for the tracking of curve and motion. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 31(1) :81–103, 2008.
- V Peyaud. *Role de la dynamique des calottes glaciaires dans les grands changements climatiques des périodes glaciaires-interglaciaires*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, October 2006.

- Dinh-Tuan Pham. A singular evolutive interpolated Kalman filter for data assimilation in oceanography. Technical report 163, IMAG-LMC, September 1996.
- Dinh-Tuan Pham. Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Mon. Weather Rev.*, 129(5) :1194–1207, May 2001.
- Dinh-Tuan Pham, Jacques Verron, and Marie-Christine Roubaud. A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. Technical report 162, IMAG-LMC, September 1996.
- Dinh-Tuan Pham, Jacques Verron, and Lionel Gourdeau. Filtres de Kalman singuliers évolutif pour l’assimilation de données en océanographie. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sci. terre planètes*, 326(4) :255–260, February 1998.
- H. D. Pritchard, R. J. Arthern, D. G. Vaughan, and L. A. Edwards. Extensive dynamic thinning on the margins of the greenland and antarctic ice sheets. *Nature*, 461 :971–975, 2009.
- M. E. Raymo. The timing of major climate terminations. *Paleoceanography*, 12(4) :577–585, 1997.
- C. F. Raymond. How do glaciers surge? a review. *J. Geophys. Res.*, 92 :91219134, 1987.
- C. F. Raymond and W. D. Harrison. Evolution of variegated glacier, alaska, usa, prior to its surge. *J. Glaciol.*, 34 :154–169, 1988.
- Mélanie Raymond-Pralong and G H Gudmundsson. Bayesian estimation of basal conditions on Rutford Ice Stream, West Antarctica, from surface data. *Journal of Glaciology*, 57(202), 2011.
- E Rignot, J Mouginot, and B Scheuchl. Ice flow of the antarctic ice sheet. *Science*, 333 (6048) :1427–1430, 2011.
- C. Ritz, V. Rommelaere, and C. Dumas. Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420, 000 years- Implications for altitude changes in the Vostok region. *Journal of Geophysical Research*, 106 :31, 2001.
- Catherine Ritz. *Un modèle thermo-mécanique d’évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-Glacier Byrd : Sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1992.
- V. Rommelaere and D. R. MacAyeal. Large-scale rheology of the ross ice shelf, antarctica, computed by a control method. *Annals of Glaciology*, 1997.
- Vincent Rommelaere. *Trois Problèmes Inverses En Glaciologie*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1997.
- H. Salman, L. Kuznetsov, C.K.R.T. Jones, and K. Ide. A method for assimilating lagrangian data into shallow-water equation ocean model. *Mon. Weather Rev.*, 134 :1081–1101, 2006.
- Johannes Schmetz, Kenneth Holmlund, Joel Hoffman, Bernard Strauss, Brian Mason, Volker Gaertner, Arno Koch, and Leo Van De Berg. Operational cloud-motion winds from Meteosat infrared images. *Journal of Applied Meteorology*, 32(7) :1206–1225, 1993.

- Christian Schoof and R C A Hindmarsh. Thin-Film Flows with Wall Slip : An Asymptotic Analysis of Higher Order Glacier Flow Models. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 63(1) :73–114, January 2010.
- H. Seddik, R. Greve, T. Zwinger, F. Gillet-Chaulet, and O. Gagliardini. Simulations of the greenland ice sheet 100 years into the future with the full stokes model Elmer/Ice. *J. Glaciol.*, 58(427–440), 2012.
- Julio Sheinbaum and David LT Anderson. Variational assimilation of xbt data. ii, sensitivity studies and use of smoothing constraints. *Journal of physical oceanography*, 20(5) : 689–704, 1990.
- I Souopgui. *Assimilation d’images pour les fluides géophysiques*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2010.
- V. Taillandier, A. Griffa, and A. Molcard. A variational approach for the reconstruction of regional scale eulerian velocity fields from lagrangian data. *Ocean Modelling*, (13) : 1–24, 2006.
- V. Taillandier, A. Griffa, P.M. Poulain, R. Signell, J. Chiggiato, and S. Carniel. On the assessment of argo float trajectory assimilation in the mediterranean forecasting system. *Journal of Geophysical Research*, (113), 2008.
- Tapenade. [http ://www-sop.inria.fr/tropics/tapenade.html](http://www-sop.inria.fr/tropics/tapenade.html), 2002.
- W. C. Thacker and R. B. Long. Fitting dynamics to data. *J. Geophys. Res.*, 93 :1227–1240, 1988.
- Claire Thomas, Thomas Corpetti, and Étienne Memin. Data Assimilation for Convective-Cell Tracking on Meteorological Image Sequences. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48(8) :3162–3177, 2010.
- O. Titaud, A. Vidard, I. Souopgui, and F-X. Le Dimet. Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus Series A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 62(1) : 30–47, 2010.
- O. Titaud, J-M. Brankart, and J. Verron. On the use of finite-time lyapunov exponents and vectors for direct assimilation of tracer images into ocean models. *Tellus Series A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 63(5) :1038–1051, 2011.
- WJJ van Pelt, Johannes Oerlemans, and C H Reijmer. An iterative inverse method to estimate basal topography and initialize ice flow models. *The Cryosphere*, 2013.
- A Vidard, Eric Blayo, Francois-Xavier Le Dimet, and Andrea Piacentini. 4D variational data analysis with imperfect model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65(3-4) :489–504, 2000.
- A Vidard, Andrea Piacentini, and Francois-Xavier Le Dimet. Variational data analysis with control of the forecast bias. *Tellus A*, 56(3) :177–188, 2004.
- Arthur Vidard. Assimilation de données et méthodes adjointes pour la géophysique. Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, July 2012.

- Arthur Vidard, Franck Vigilant, Charles Deltel, and Rachid Benshila. Nemovar : Short and long term development strategies. Technical report, ANR VODA deliverables, 2010.
- Arthur Vidard, Franck Vigilant, Charles Deltel, and Rachid Benshila. Nemo tangent and adjoint models reference manual and users guide. Technical report, ANR VODA deliverables, 2012.
- A. Vieli and A. J. Payne. Application of control methods for modelling the flow of pine island glacier, west antarctica. *Annals of Glaciology*, 2003.
- A. Weaver and P. Courtier. Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127 :1815–1846, July 2001.

Méthodes pour les problèmes inverses et l'analyse de sensibilité

Plan du chapitre

2.1	Réduction de dimension	89
2.1.1	Présentation	89
	Cadre de travail	89
	Système réduit	90
	Borne d'erreur a posteriori	91
	Choix de la base réduite	91
2.1.2	Borne certifiée pour l'équation de Burgers avec viscosité	92
	Modèle et problématique	92
	Méthodes	93
	Résultats numériques	95
2.1.3	Borne d'erreur orientée-sortie	97
	Présentation du problème	97
	Borne d'erreur probabiliste	98
	Résultats numériques	99
2.2	Analyse de sensibilité globale	101
2.2.1	Présentation	101
	Cadre de travail	101
	Indices de sensibilité globale de Sobol	102
	Estimation par méthode de Monte-Carlo	102
2.2.2	Utilisation de métamodèles pour estimer les indices de Sobol : quelle perte d'information ?	103
	Présentation du problème	103
	Quantification des erreurs d'estimation	104
	Application	105
2.2.3	Etude asymptotique de l'estimation d'indices de Sobol	106
	Présentation	106
	Normalité asymptotique	107
	Efficacité asymptotique	109
	Illustrations numériques	109
2.3	Algorithme du nudging direct et rétrograde (BFN)	114

2.3.1	Présentation	114
	Nudging	114
	Algorithme du BFN	114
2.3.2	Résultats théoriques négatifs	115
	Discussion	115
	Equation de transport sans viscosité	115
	Equation de transport avec viscosité	116
2.3.3	Amélioration de l'algorithme	117
	Point de départ	118
	Algorithme du BFN diffusif	118
	Applications	118
2.4	Etude expérimentale de la méthode HUM pour l'équation des ondes	121
2.4.1	Présentation	121
	Contrôlabilité des ondes	121
	Méthode HUM	121
	Condition de contrôle géométrique	122
2.4.2	Méthode numérique	122
2.4.3	Etude expérimentale de l'opérateur HUM	123
	Effet du lissage	126
	Localisation en fréquence	126
	Localisation en espace	126
2.5	Bibliographie du chapitre 2	127

2.1 Réduction de dimension

Dans ce paragraphe, on présente les problèmes de réduction de dimension que l'on a étudiés avec C. Prieur, dans le cadre de la thèse d'A. Janon, que nous avons encadrée ensemble. Pour commencer, on présente le principe des bases réduites et des bornes d'erreur certifiées. Ensuite on résume les publications publiée [10] et soumise [21].

2.1.1 Présentation

L'idée de la réduction de dimension est la suivante. Supposons qu'on souhaite résoudre un système d'équations aux dérivées partielles avec un ordinateur. Après discrétisation, on est ramené à un système (éventuellement non linéaire) en très grande dimension ; la dimension étant le nombre de point de grille, le nombre de fonctions éléments finis, le nombre de cellules de volumes finis, etc. Il existe ensuite diverses raisons pour vouloir éviter de calculer en si grande dimension : on peut vouloir calculer très rapidement la solution (applications de type temps-réel), ou bien vouloir effectuer un grand nombre de calculs (méthode de Monte-Carlo, optimisation itérative, etc.). La réduction de dimension consiste alors à chercher le vecteur solution (a priori de très grande taille) comme une combinaison linéaire d'un petit nombre de vecteurs indépendants. Les inconnues du système sont alors ce petit nombre de coefficients, et la dimension de l'espace de travail s'en trouve réduite.

Cadre de travail

Le cadre de travail est celui des équations aux dérivées partielles (EDP) à paramètres. On verra par exemple une application plus loin à l'équation de Burgers visqueuse, dans lesquelles les paramètres sont la viscosité et les conditions aux limites. On verra aussi plus loin le benchmark d'un problème de Venturi, dans lequel la géométrie du domaine joue le rôle de paramètres. Ainsi, le système considéré pourra se mettre sous une forme entrée / sortie :

$$\mu \mapsto u(\mu) \mapsto s(\mu) = s(u(\mu))$$

où $\mu \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres, u la solution du système d'EDP, et s la sortie, que l'on calcule en fonction de l'état du système (par exemple la valeur de u sur un bord, une moyenne de u , ou tout autre quantité d'intérêt). Le cadre classique des méthodes de réduction de dimension (voir Prud'homme et al. (2002); Veroy et al. (2003); Prud'homme and Patera (2004); Cuong et al. (2005); Grepl et al. (2007)) est celui où l'EDP considérée est linéaire, mise sous la forme variationnelle suivante :

$$a(u(\mu), v; \mu) = l(v; \mu), \quad \forall v \in H, \text{ pour tout jeu de paramètres } \mu \quad (2.1)$$

avec $u(\mu) \in H$ un espace de Hilbert de dimension \mathcal{N} d'éléments finis, $a(., .; \mu)$ une forme bilinéaire sur H et $l(., \mu)$ une forme linéaire. La linéarité de l'EDP est supposée ici pour simplifier la présentation, mais on peut voir dans Grepl and Patera (2005); Urban and Patera (2012); Knezevic et al. (2010); Veroy and Patera (2005) et [10] des applications à des EDP non linéaires. Ensuite on suposera, toujours pour des questions de lisibilité, que a et l dépendent de μ de la manière dite affine suivante :

$$a(., .; \mu) = \sum_{q=1}^Q \theta_q(\mu) a_q(., .), \quad l(., \mu) = \sum_{q'=1}^{Q'} \gamma_{q'}(\mu) l_{q'}(.), \quad \forall \mu$$

où Q et Q' sont des entiers, θ_q et $\gamma_{q'}$ sont des fonction réelles et a_q et $l_{q'}$ sont des formes bilinéaires et linéaires qui ne dépendent pas de μ . Dans le cas non-linéaire, la méthode des *magic points* (interpolation empirique, voir Grepl et al. (2007)) permet de se ramener approximativement à une forme affine.

Enfin, on suppose que a est coercive, à μ fixé :

$$\forall \mu, \quad \exists \alpha(\mu) > 0, \quad a(u, v; \mu) \geq \alpha(\mu) \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$

Système réduit

Dans le cadre précédent (éléments finis), la solution u se décompose dans une base $\phi_1, \dots, \phi_{\mathcal{N}}$ de H , où \mathcal{N} est grand :

$$u(\mu) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} u_i(\mu) \phi_i$$

On souhaite donc désormais chercher une approximation de u en dimension réduite n :

$$\tilde{u}(\mu) = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(\mu) \zeta_i$$

où $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ est une famille libre de vecteur de H (indépendants de μ), que l'on appelle la *base réduite*. L'espace réduit engendré par les ζ_i , $\text{Vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, est noté \tilde{H} . On cherche alors \tilde{u} comme solution du problème variationnel dans \tilde{H} :

$$a(\tilde{u}(\mu), v; \mu) = l(v; \mu), \quad \forall v \in \tilde{H}$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \sum_{q=1}^Q \theta_q(\mu) a_q(\zeta_i, \zeta_j) = \sum_{q'=1}^{Q'} \gamma_{q'}(\mu) l_{q'}(\zeta_j), \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Cette écriture permet de mettre en évidence le fonctionnement offline / online de la méthode :

- Offline : après avoir choisi la base, on calcule et on stocke les nombres indépendants de μ : $a_q(\zeta_i, \zeta_j)$ et $l_{q'}(\zeta_j)$, pour tout $i, j = 1..n$. Ceci peut être coûteux, car sa complexité dépend de \mathcal{N} , mais n'est effectué qu'une seule fois.
- Online : pour chaque valeur du paramètre μ voulue, on calcule $\theta_q(\mu)$ et $\gamma_{q'}(\mu)$, et grâce aux éléments stockés dans la phase online on assemble le système (de taille n) pour les \tilde{u}_i et on le résout. La complexité de cette phase est indépendante de \mathcal{N} .

Sous réserve que le problème et le choix de la base permettent d'avoir $n \ll \mathcal{N}$ tout en ayant \tilde{u} proche de u , on gagne ainsi en temps de calcul, à la condition que l'on puisse négliger le coût de la phase offline, ce qui est le cas si on fait de très nombreux calculs ou bien qu'on travaille en temps réel.

Borne d'erreur a posteriori

Le grand intérêt de la méthode de réduction proposée par Prud'homme et al. (2002); Veroy et al. (2003); Prud'homme and Patera (2004); Cuong et al. (2005); Grepl et al. (2007) est de fournir une borne d'erreur à la fois certifiée et calculable online (c'est-à-dire avec une complexité indépendante de \mathcal{N}) :

$$\|u(\mu) - \tilde{u}(\mu)\| \leq \varepsilon(\mu), \quad \forall \mu$$

Dans le cas où la forme bilinéaire $a(., .; \mu)$ est symétrique, la borne peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(\mu) = \frac{\rho(\mu)}{\alpha(\mu)} \quad (2.2)$$

où $\rho(\mu)$ est la norme duale du résidu $r(., \mu)$:

$$\rho(\mu) = \sup_{v \in H, \|v\|=1} |r(v; \mu)|, \quad r(v; \mu) = a(\tilde{u}(\mu), v; \mu) - l(v; \mu)$$

Tout l'intérêt de la méthode réside évidemment dans le fait qu'on peut mettre en œuvre une procédure offline / online pour calculer un majorant de cette borne d'erreur, de manière à produire une approximation $\tilde{u}(\mu)$ certifiée (sans que la certification fasse exploser le temps de calcul). On renvoie à Nguyen et al. (2005); Huynh et al. (2007a); Chen et al. (2009) pour les détails de cette mise en œuvre.

Choix de la base réduite

Tout ce qu'on a vu jusqu'à présent peut être mis en œuvre avec n'importe quelle base réduite (autrement dit n'importe quelle famille libre ζ_1, \dots, ζ_n de vecteurs de H). La question suivante est bien sûr de trouver une bonne base, c'est-à-dire une base qui garantisse une erreur a posteriori petite. On passe en revue ci-dessous rapidement les différentes options qui existent dans la littérature.

Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). La POD (proper orthogonal decomposition) porte divers noms selon le domaine où elle est employée (analyse en composantes principales PCA, fonctions empiriques orthogonales EOF, décomposition en valeurs singulières SVD, transformation de Karhunen-Loeve, etc.). L'idée est de chercher la base POD \mathcal{B} comme la base orthonormée de taille n qui minimise l'erreur quadratique de projection sur cette base $\Pi_{\mathcal{B}}$, en moyenne sur les paramètres μ :

$$\mathcal{B} = \underset{b \text{ base orthonormée de taille } n}{\operatorname{argmin}} \int \|u(\mu) - \Pi_b(u(\mu))\|^2 d\mu$$

où l'on a supposé que les paramètres μ étaient distribués selon la densité de probabilité $d\mu$. En pratique, on calcule une approximation de la base \mathcal{B} par la méthode des snapshots, autrement dit on évalue l'intégrale ci-dessus par méthode de Monte-Carlo en utilisant un (grand) échantillon M de la loi de μ :

$$\mathcal{B} \simeq \underset{b \text{ base orthonormée de taille } n}{\operatorname{argmin}} \sum_{\mu \in M} \|u(\mu) - \Pi_b(u(\mu))\|^2$$

Ceci se fait en calculant la décomposition en valeurs singulières de la matrice des snapshots. Tout d'abord on forme cette matrice A en plaçant dans ses colonnes les snapshots centrés :

$$A = [u(\mu_1) - \bar{u}; \dots; u(\mu_m) - \bar{u}], \quad \bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u(\mu_i), \quad M = \{\mu_i, i = 1..m\}$$

ensuite on effectue la décomposition en valeurs singulières de A :

$$A = U\Sigma V^T$$

où Σ est la matrice diagonale des valeurs singulières (classées dans l'ordre décroissant). La base recherchée \mathcal{B} est alors formée des n premières colonnes de V , que l'on normalise.

Algorithme glouton. La méthode *greedy* (voir Nguyen et al. (2005); Buffa et al. (2009)) consiste à construire itérativement la base de sorte que la borne d'erreur de réduction soit la plus faible possible. On commence, comme précédemment, par choisir un (grand) échantillon M selon la loi de μ . Ensuite on initialise la base \mathcal{B} en prenant

$$\mathcal{B} = \{u(\mu_0)\}, \quad \mu_0 \text{ choisi au hasard selon la loi de } \mu$$

et ensuite on itère les deux étapes suivantes :

1. calculer $\mu_j = \operatorname{argmax}_{\mu \in M} \varepsilon(\mu)$, où la borne d'erreur ε est calculée avec la base \mathcal{B} courante ;
2. mettre à jour la base \mathcal{B} en y ajoutant le vecteur $u(\mu_j)$ et réorthonormaliser.

Base orientée-sortie. L'idée cette fois est de choisir une base qui permette de minimiser non plus l'erreur commise sur l'état $\varepsilon(\mu)$ mais sur la sortie $\|s(u(\mu)) - s(\tilde{u}(\mu))\|$. Ce problème est résolu comme un problème de contrôle optimal dans Bui-Thanh et al. (2007) pour des systèmes dynamiques linéaires, mais la méthode est très coûteuse à mettre en œuvre en pratique.

2.1.2 Borne certifiée pour l'équation de Burgers avec viscosité

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article [10], écrit en collaboration avec C. Prieur et A. Janon, dans le cadre de son travail de thèse.

Modèle et problématique

Le point de départ de ce travail est d'étudier la mise en œuvre de la méthode de bases réduites présentée plus haut pour un modèle "jouet" d'équation d'écoulement géophysique, à savoir l'équation de Burgers avec viscosité. La question que l'on se posera plus tard sera celle de la sensibilité de l'équation à certains de ses paramètres d'entrée. Comme pour cela on mettra en œuvre une méthode de Monte-Carlo, on aura besoin de calculer de nombreuses solutions (associées à divers jeux de paramètres), d'où le besoin d'avoir un modèle réduit fiable et peu coûteux.

Le problème que l'on considère est le suivant, et se pose pour une fonction u de l'espace $x \in [0; 1]$ et du temps $t \in [0; T]$ (avec $T > 0$), assez régulière : $u \in C^1([0, T], H^1([0, 1]))$, satisfaisant l'équation de Burgers visqueuse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (2.3)$$

où $\nu \in \mathbb{R}_*^+$ est la viscosité et $f \in C^0([0, T], L^2(]0, 1[))$ est le terme source. On ajoute bien sûr les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$u(t = 0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0; 1] \quad (2.4)$$

avec $u_0 \in H^1(]0, 1[)$

$$\begin{cases} u(t, x = 0) = b_0(t) \\ u(t, x = 1) = b_1(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0; T] \quad (2.5)$$

où $b_0, b_1 \in C^0([0, T])$ vérifient avec u_0 la condition de compatibilité suivante :

$$u_0(0) = b_0(0) \quad \text{and} \quad u_0(1) = b_1(0)$$

L'existence et l'unicité de la solution u recherchée est un résultat classique (Hopf, 1950).

Les paramètres d'entrée de ce modèle sont ν , u_0 , b_0 , b_1 et f . En effet, dans une perspective d'extension à l'océanographie ce sont les paramètres importants du modèle (forçages externes, conditions aux limites, viscosité, conditions initiales), ils sont en général mal connus.

A l'exception de la viscosité ce sont des paramètres fonctionnels. Comme nos stratégies de réduction fonctionnent avec un nombre pas trop grand de paramètres scalaires, on choisit de paramétrer les fonctions dans des bases adéquates (que l'on ne précise pas ici, mais qui sont supposées assez régulières, comme les séries de Fourier par exemple) :

$$\begin{aligned} b_0(t) &= b_{0m} + \sum_{l=1}^{n(b_0)} A_l^{b_0} \Phi_l^{b_0}(t) & b_1(t) &= b_{1m} + \sum_{l=1}^{n(b_1)} A_l^{b_1} \Phi_l^{b_1}(t) \\ s(t, x) &= f_m + \sum_{l=1}^{n_T(f)} \sum_{p=1}^{n_S(f)} A_{lp}^f \Phi_l^{fT}(t) \Phi_p^{fS}(x) & u_0(x) &= u_{0m} + \sum_{l=1}^{n(u_0)} A_l^{u_0} \Phi_l^{u_0}(x) \end{aligned}$$

où les fonctions de base sont Φ^{b_0} , Φ^{b_1} , Φ^{fT} , Φ^{fS} et Φ^{u_0} sont fixées, ainsi que les entiers $n(b_0)$, $n(b_1)$, $n_T(f)$, $n_S(f)$ et $n(u_0)$. Ainsi, notre jeu de paramètres comprend les variables scalaires suivantes :

$$\nu, b_{0m}, b_{1m}, f_m, u_{0m}, \left(A_l^{b_0}\right)_{l=1, \dots, n(b_0)}, \left(A_l^{b_1}\right)_{l=1, \dots, n(b_1)}, \left(A_{lp}^f\right)_{l=1, \dots, n_T(f); p=1, \dots, n_S(f)}, \left(A_l^{u_0}\right)_{l=1, \dots, n(u_0)}$$

sujets à la condition de compatibilité :

$$b_{0m} = u_{0m} \quad \text{and} \quad b_{1m} = u_{0m} + \sum_{l=1}^{n(u_0)} A_l^{u_0} \Phi_l^{u_0}(x)$$

Méthodes

Discretisation et décomposition offline / online. Dans Nguyen et al. (2005) les auteurs étudient ce problème en ne considérant qu'un seul paramètre, la viscosité. Nous avons adapté cette méthode pour prendre en compte les autres paramètres, mais le principe est le même. L'idée est de partir de l'équation continue et de se ramener à la résolution d'un système linéaire en dimension \mathcal{N} , pour lequel on peut mettre en œuvre la méthode de réduction présentée plus haut. On procède ainsi, en suivant Nguyen et al. (2005) (à l'exception de l'étape 2 que nous avons ajoutée) :

1. Etablissement de la forme faible de (2.3,2.4)
2. Pénalisation dans la forme faible des conditions aux limites (2.5)
3. Discrétisation par éléments finis P^1 . On obtient ainsi un système d'équations différentielles ordinaires en dimension \mathcal{N} .
4. Discrétisation en temps par méthode d'Euler implicite. On obtient ainsi un système non-linéaire en dimension \mathcal{N} .
5. Résolution par méthode de Newton. A chaque itération, on doit résoudre un système linéaire en dimension \mathcal{N} .

Pour une base réduite ζ_1, \dots, ζ_n donnée, on peut mettre en œuvre sur ce dernier système linéaire une stratégie offline / online, qui permet de le résoudre avec une complexité indépendante de \mathcal{N} . La complexité globale dépend alors de n , du nombre d'itérations de Newton et du nombre de pas de temps. On renvoie à [10] pour les détails.

Borne d'erreur. Des calculs techniques détaillés dans [10] permettent d'établir une borne d'erreur pour la réduction proposée. Pour cela on procède en deux étapes : d'abord, on établit un théorème donnant une estimation de l'erreur $e_k = u(t_k) - \tilde{u}(t_k)$ à chaque pas de temps t_k . Ensuite, on propose une stratégie pour effectivement estimer un majorant de cette borne qui soit calculable online. La difficulté principale repose sur l'estimation de bornes supérieures et inférieures pour les nombres C_k appelés *constantes de stabilité* :

$$C_k = \inf_{v \in H, \|v\|=1} 2c(\tilde{u}_k, v, v) + \nu a(v, v)$$

où c et a sont les formes tri- et bi-linéaires issues des termes associés à $\frac{1}{2}\partial_x(u^2)$ et $-\nu\partial_{xx}u$ dans la formulation variationnelle de l'équation (2.3). Pour ceci, on utilise la méthode des contraintes successives (SCM) (Huynh et al., 2007b; Nguyen et al., 2009), qui est reprise de manière détaillée dans [10].

Choix de la base réduite. L'article propose de comparer trois choix de bases : POD, Greedy, et hybride. On ne revient pas sur les bases POD et Greedy qui ont été présentées plus haut.

La base hybride est un mélange des stratégies POD et Greedy, proposée dans Haasdonk and Ohlberger (2008). L'algorithme de construction de la base est le suivant :

1. Se donner un entier P .
2. Choisir un (grand) échantillon des paramètres.
3. Choisir un μ au hasard, et initialiser la base \mathcal{B} en orthonormalisant l'espace vectoriel engendré par les $u(t_k, \mu)$, pour tous les pas de temps t_k .
4. Itérer la procédure suivante :
 - (a) Trouver le μ^* qui maximise (pour tous les μ dans l'échantillon) l'indicateur d'erreur online, calculé avec la base \mathcal{B} courante.
 - (b) Calculer les P premiers modes POD de l'ensemble de snapshots $u(t_k, \mu^*)$, pour tous les pas de temps t_k .
 - (c) Ajouter ces modes à la base \mathcal{B} (en orthonormalisant).

A toutes ces bases on ajoute les fonctions de base pour la condition initiale, afin d'avoir une erreur initiale nulle.

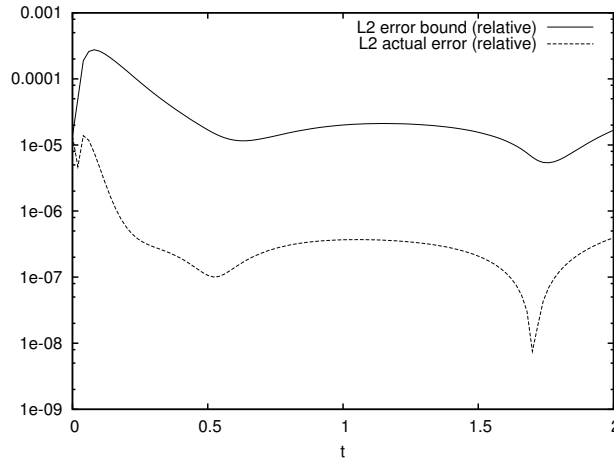


FIGURE 2.1 – Erreurs relatives pour 7 paramètres variables et une base POD à 7 éléments, en fonction du temps. Le trait plein désigne la borne online relative $\epsilon_k/\|\tilde{u}^k\|$, et le trait pointillé $\|u^k - \tilde{u}^k\|/\|\tilde{u}^k\|$ désigne l'erreur réelle.

Résultats numériques

Premiers résultats. On présente les résultats pour un premier cas-test simplifié, avec seulement 7 paramètres actifs, avec la base POD. La figure 2.1 présente la borne d'erreur produite avec 7 modes POD, ainsi que l'erreur réelle. On obtient ainsi une borne d'erreur inférieure à 1 pour 1 000, avec une réduction du temps de calcul de 85% (calcul de la borne compris).

Comparaison des bases. La figure 2.2 présente une comparaison des bornes d'erreur obtenues avec les trois bases proposées, en fonction du nombre d'éléments dans chaque base, pour un cas-test simplifié, avec un seul paramètre (pour la condition initiale). Le temps de calcul varie à peu près du simple au double selon la méthode (simple pour POD-Greedy, moyen pour POD, double pour Greedy), le temps de calcul online restant le même. Les trois bases produisent des résultats sensiblement similaires, la base POD-Greedy est légèrement en retrait, tandis que la base POD est meilleure en erreur moyenne (en temps) et la base Greedy est meilleure pour l'erreur maximale (en temps).

Comparaison avec la borne existante. Enfin, la figure 2.3 présente la comparaison avec la borne existant dans la littérature (Nguyen et al., 2009). Elle met en évidence la performance de notre borne (calculée avec la base POD), qui permet de gagner un ordre de grandeur. Ceci peut aussi se voir sur le calcul, puisque dans le contexte de Nguyen et al. (2009), seul le paramètre ν est considéré, ce qui simplifie grandement les calculs. En effet, la borne existante est :

$$\|e_k\| \leq \sqrt{\frac{\|e_{k-1}\|^2 + \frac{\Delta t}{\nu} \|r_k\|_0^2}{1 + \widetilde{C}_k \Delta t}}, \text{ avec } \widetilde{C}_k = \inf_{v \in X_0} \frac{4c(\tilde{u}^k, v, v) + \nu a(v, v)}{\|v\|^2}$$

alors que notre borne est :

$$\|e_k\| \leq \frac{\|e_{k-1}\| + \Delta t \|r_k\|_0}{1 + C_k \Delta t}, \text{ avec } C_k = \inf_{v \in X_0, \|v\|=1} [2c(\tilde{u}^k, v, v) + \nu a(v, v)]$$

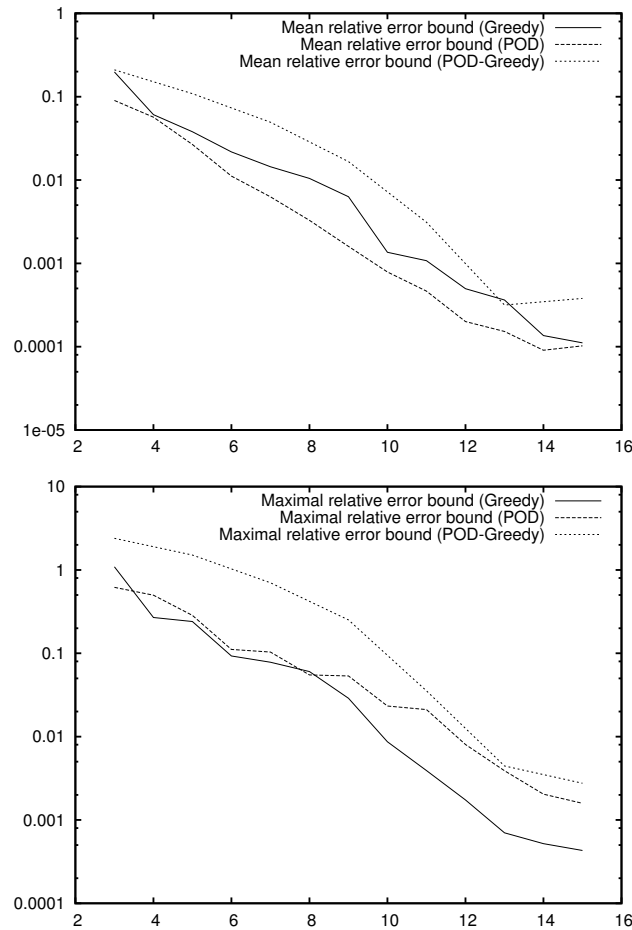


FIGURE 2.2 – Comparaison des bases POD, Greedy et POD-Greedy. On dessine l'erreur moyenne en temps (en haut) et l'erreur maximale en temps (en bas) en fonction de la taille de la base, pour un échantillon aléatoire uniforme de taille 100 de l'unique paramètre $u_{0m} \in [0, 1]$.

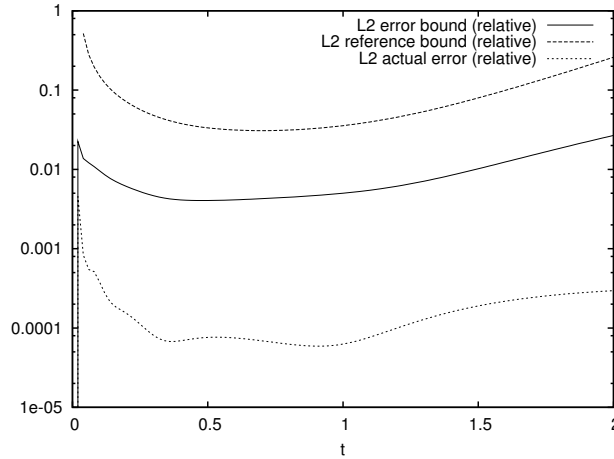


FIGURE 2.3 – Comparaison entre notre borne, la borne Nguyen et al. (2009) (appelée reference) et la vraie erreur, en fonction du temps, pour $\nu = 0.1$.

2.1.3 Borne d'erreur orientée-sortie

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans le travail soumis [21], en collaboration avec C. Prieur et A. Janon, dans le cadre de sa thèse.

Présentation du problème

Présentation. Le point de départ de ce travail est le suivant : la borne d'erreur proposée précédemment est une borne sur la solution u du problème d'EDP considéré. Lorsque la quantité d'intérêt (la sortie) n'est pas u mais une fonction de u , on voudrait pouvoir proposer une borne qui soit meilleure, et adaptée à la sortie. Admettons par exemple que u se décompose dans une base réduite choisie, par exemple $u = \sum_i u_i \phi_i$, mais que la sortie $s(u)$ ne "voie" que certaines composantes de u , par exemple $s(u) = \sum_{i \text{ pair}} s_i u_i \phi_i$. On voudrait dans ce cas ne pas avoir dans la borne les termes d'erreur associés aux modes impairs de u . Ceci permet de réduire la borne, et donc soit de proposer un résultat plus précis, soit en conservant la précision de réduire le nombre d'éléments dans la base réduite et donc le temps de calcul.

Cadre de travail et notations. On se place dans le cadre précédent d'une EDP à paramètres, mise sous forme variationnelle et discrétisée par éléments finis. L'espace de travail est noté X , sa dimension est \mathcal{N} . On suppose cette fois dans 2.1 que a est bilinéaire définie positive et que le second membre l est linéaire, de sorte que l'équation se ramène à la résolution d'un système linéaire à paramètres dans X :

$$A(\mu)u(\mu) = l(\mu)$$

Comme précédemment, on peut choisir une base réduite et obtenir une solution approchée, par une décomposition offline / online adéquate. On note \tilde{X} l'espace réduit (de dimension n), et Z la matrice (de taille $\mathcal{N} \times n$) contenant en colonnes les vecteurs de la base réduite. Si on note \tilde{u} les composantes de la projection de u sur \tilde{X} on a

$$Z^T A Z \tilde{u} = Z^T l$$

On suppose également que la sortie $s(\mu) = s(u(\mu))$ est une fonction linéaire de u , autrement dit une forme linéaire de X . Pour le produit scalaire choisi, cette forme linéaire admet un représentant dans X , que l'on note S (autrement dit $s(u) = \langle S, u \rangle$). On définit ensuite la sortie réduite par

$$\tilde{s}(\mu) = \langle S, Z\tilde{u}(\mu) \rangle = \langle Z^T S, \tilde{u}(\mu) \rangle$$

et on note également $\tilde{S} = Z^T S$.

L'objectif de ce travail est de produire une borne sur la sortie $\tilde{s}(\mu)$ calculé par réduction de dimension par rapport à la sortie réelle $s(\mu)$.

Travaux antérieurs. Il existe deux bornes orientées-sortie dans la littérature. La première consiste simplement à utiliser une borne existante pour u et la linéarité de la sortie :

$$|s(\mu) - \tilde{s}(\mu)| \leq \|S\| \|u(\mu) - Z\tilde{u}(\mu)\|$$

On appelle cette borne la borne Lipschitz. Elle s'étend tout naturellement au cas où la sortie n'est pas linéaire mais lipschitzienne.

La deuxième approche (Nguyen et al., 2005) est d'utiliser la solution du problème adjoint pour corriger la sortie, et de proposer une borne (meilleure) sur la sortie corrigée. La solution du problème adjoint s'écrit (dans le cas simplifié où A est symétrique) :

$$A(\mu)u^a(\mu) = -S$$

On peut mettre en œuvre comme précédemment une méthode de réduction, avec une base réduite stockée dans les colonnes de la matrice Z^a , et les coordonnées \tilde{u}^a de la solution réduite approchée dans cette base.

La sortie corrigée est alors

$$s^a(\mu) = s(Z\tilde{u}(\mu)) + \langle r(\mu), Z^a\tilde{u}^a(\mu) \rangle$$

où $r(\mu) = A(\mu)Z\tilde{u}(\mu) - l(\mu)$ est le résidu. Et la borne d'erreur associée est

$$|s(\mu) - \tilde{s}(\mu)| \leq \frac{\rho(\mu)\rho^a(\mu)}{\alpha(\mu)}$$

où $\rho(\mu)$ est la norme duale du résidu $r(\mu)$, $\rho^a(\mu)$ la norme duale du résidu adjoint $r^a(\mu) = AZ^a\tilde{u}^a - S$ et $\alpha(\mu)$ la constante de coercivité de A (faire le parallèle avec l'équation 2.2).

Borne d'erreur probabiliste

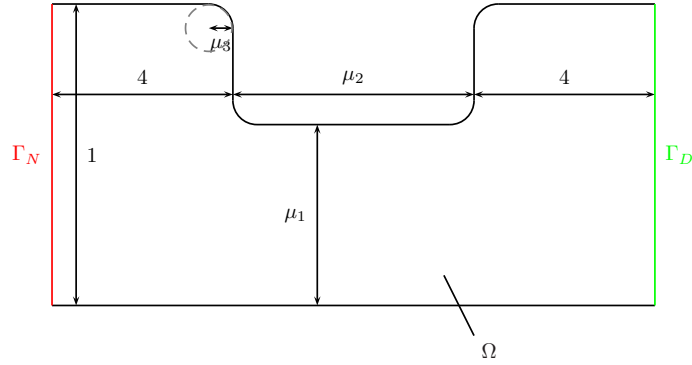
L'objet du travail [21] est de proposer une borne en probabilité, dépendant d'un niveau de risque $\beta \in]0, 1[$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}\left(|s(\mu) - \tilde{s}(\mu)| \geq \varepsilon(\mu, \beta)\right) \leq \beta$$

Autrement dit, on prend un risque β que l'erreur ne soit pas inférieure à la borne produite.

On explique en quelques lignes le point de départ de la preuve, qui part de l'égalité

$$A^{-1}r = Z\tilde{u} - A^{-1}l = Z\tilde{u} - u$$

FIGURE 2.4 – Domaine $\Omega(\mu)$ pour le problème de Venturi.

On a donc

$$\tilde{s}(\mu) - s(\mu) = \langle S, Z\tilde{u} - u \rangle = \langle S, A^{-1}r \rangle = \langle A^{-T}S, r \rangle$$

On décompose le résidu dans une base orthonormée $\phi_1, \dots, \phi_{\mathcal{N}}$ de X :

$$r(\mu) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} r_i(\mu) \phi_i$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\tilde{s}(\mu) - s(\mu) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} r_i(\mu) \langle A^{-T}S, \phi_i \rangle$$

L'idée de la preuve de la borne en probabilité est alors de séparer cette somme en deux et de borner les deux morceaux par un choix adéquat de la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{N}}$.

Ce travail s'étend naturellement à la méthode existant dans la littérature avec la borne duale, de manière à obtenir également une borne en probabilité sur la sortie corrigée.

Résultats numériques

Nous validons notre méthode sur un benchmark classique pour les bases réduite, le modèle de Venturi (Rozza and A.T., 2008). L'EDP considérée est la suivante :

$$\begin{cases} \Delta u_e = 0 \text{ in } \Omega(\mu) \\ u_e = 0 \text{ on } \Gamma_D \\ \frac{\partial u_e}{\partial n} = -1 \text{ on } \Gamma_N \\ \frac{\partial u_e}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D) \end{cases}$$

Les trois paramètres :

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathcal{P} = [0.25, 0.5] \times [2, 4] \times [0.1, 0.2],$$

définissent la géométrie du domaine $\Omega(\mu)$, voir à la figure 2.4. Pour ce modèle on met en œuvre une stratégie offline / online et on calcule les quatre bornes vues précédemment :

1. borne Lipschitz

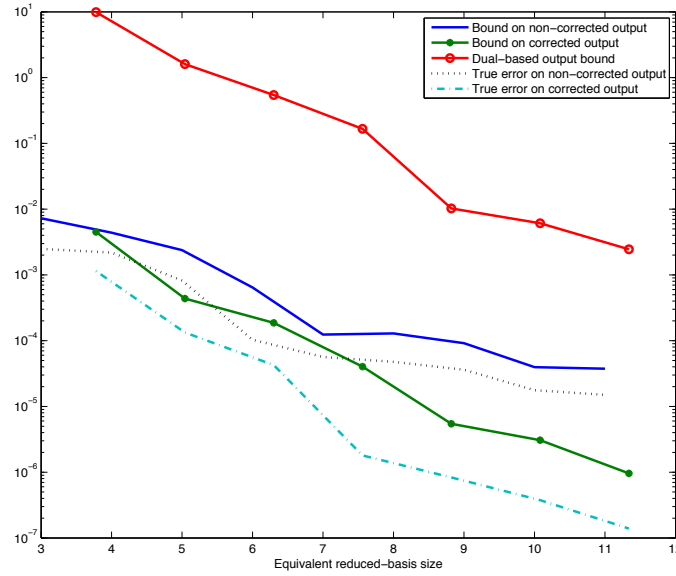


FIGURE 2.5 – Comparaison des bornes d’erreur en fonction de la taille de la base réduite. Pour la sortie non corrigée, la borne d’erreur en probabilité avec risque $\beta = 0.0001$ est en bleu, la vraie erreur en pointillés noirs. Pour la sortie corrigée, la vraie erreur est en bleu clair, la borne duale en rouge, et la borne en probabilité (risque $\beta = 0.0001$) est en vert. La borne Lipschitz est trop grande pour apparatre sur la figure.

2. borne duale (avec l’adjoint, sur la sortie corrigée)
3. borne probabiliste
4. borne probabiliste sur la sortie corrigée

La figure 2.5 compare ces bornes avec l’erreur réelle, en fonction de la taille de la base réduite. Afin de comparer des choses comparables, on a fait un changement d’échelle sur la taille de base pour les bornes faisant intervenir l’adjoint (car elle nécessitent deux fois plus de calcul offline et online) (voir [21] pour les détails). La borne Lipschitz est nettement moins bonne que toutes les autres et n’apparaît pas sur la figure. On peut voir que notre borne d’erreur, pour un risque $\beta = 0.0001$ est assez proche de la vraie erreur (moins d’un ordre de grandeur), et meilleure que la borne duale existante.

Le document présente également la mise en œuvre de cette méthode pour une équation de transport, avec le même type de conclusions, voir [21].

2.2 Analyse de sensibilité globale

Dans ce paragraphe, on présente les problèmes d'analyse de sensibilité globale que l'on s'est posés (en parallèle de nos études sur la réduction de dimension) avec C. Prieur, A. Janon, et les statisticiens toulousains F. Gamboa, T. Klein et A. Lagnoux. Pour commencer, on présente les indices de sensibilité de Sobol. Ensuite on résume les articles [9] et [11].

2.2.1 Présentation

Comme on a pu le voir dans la première partie, la plupart des modèles géophysiques comportent un nombre certain de paramètres mal connus, que l'on essaie bien souvent d'estimer par méthodes inverses. La toute première étape évidemment, avant même d'envisager une méthode inverse, est d'identifier les paramètres les plus sensibles d'un modèle, ceux dont l'incertitude se ressentira le plus fortement sur les erreurs de prévisions.

Cadre de travail

Pour fixer les notations, on supposera dans cette section que les paramètres d'entrée sont p variables réelles X_1, \dots, X_p , et que la sortie du modèle Y est une variable réelle aussi, donnée par

$$Y = f(X_1, \dots, X_p)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, dans le modèle de Venturi vu précédemment, les X_i sont les paramètres géométriques du modèle et Y est le flux du fluide au travers d'une des frontières. Ou encore, dans un modèle de glaciologie pour la paléoclimatologie, les X_i sont les paramètres liés à la température et Y est le volume de glace à un temps donné.

Il est naturel de supposer que les paramètres inconnus X_i sont des variables aléatoires réelles. Leurs lois sont en général inconnues, mais modélisées grâce à l'expertise des modélisateurs et des spécialistes. Pour le moment, de nombreux modèles géophysiques sont déterministes, autrement dit la fonction f ne comporte pas d'aléa, mais si on voit les X_i comme des variables aléatoires, alors Y est également une variable aléatoire.

Il existe différentes façons de quantifier la sensibilité d'un modèle à ses paramètres d'entrée. On peut déjà distinguer la mesure globale de la mesure locale. Cette dernière est simplement la traduction mathématique de la question : si je perturbe légèrement les paramètres d'entrée *autour d'une valeur de référence*, comme se trouve modifiée la sortie du modèle ? La dérivation du modèle par rapport aux paramètres au point voulu $\partial_{X_i} f(x_1, \dots, x_p)$ donne une réponse à cette question.

Si on veut une mesure globale de la sensibilité à un paramètre donné, on peut encore utiliser la dérivée, par exemple de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^p} (\partial_{X_i} f(X_1, \dots, X_p))^2 dX_1 \dots dX_p$$

où l'intégrale doit être comprise comme l'espérance mathématiques de la variable aléatoire $(\partial_{X_i} f(X_1, \dots, X_p))^2$.

Mais bien souvent on préfère tirer parti du cadre de travail stochastique et proposer une mesure de la sensibilité basée sur la variance, comme on va le voir plus bas.

Indices de sensibilité globale de Sobol

Une façon populaire de mesurer la sensibilité globale sont les indices de Sobol (Sobol, 1993) basés sur la variance. L'indice de sensibilité du modèle par rapport au paramètre X_i est défini ainsi :

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i))}{\text{Var}(Y)}$$

où $\mathbb{E}(Y|X_i)$ est l'espérance conditionnelle de Y sachant X_i . C'est une variable aléatoire qui ne dépend que de X_i . De plus, si les variables aléatoires sont de carré intégrable, alors on peut voir $\mathbb{E}(Y|X_i)$ comme la projection orthogonale de Y sur les variables aléatoires de L^2 ne dépendant que de X_i . C'est donc, parmi les fonctions de X_i , la plus proche de Y au sens des moindres carrés. La variance de $\mathbb{E}(Y|X_i)$ quantifie ainsi la dispersion de Y lorsque seul X_i varie. Par conséquent, le quotient S_i est la part de dispersion de Y que l'on peut expliquer grâce aux seules variations de X_i . Un indice proche de 0 indique que Y varie peu en fonction de X_i . À l'inverse, un indice proche de 1 montre que X_i est très influent sur Y .

Estimation par méthode de Monte-Carlo

Mis à part dans des cas très simples (en général des exemples académiques), on ne peut pas calculer exactement les indices de Sobol, pas même les expliciter comme des fonctions des paramètres d'entrée, et on doit recourir à des approximations numériques. La méthode de Monte-Carlo est une façon populaire de procéder. L'idée est de simuler l'aléa des variables d'entrée en choisissant convenablement un grand échantillon de ces paramètres, puis en calculant Y pour chacun de ces paramètres. On obtient ainsi un échantillon d'entrée et un échantillon de sortie qui permet d'estimer les indices.

On définit ici l'estimateur original proposé par Sobol (2001). Pour cela on définit deux échantillons (aléatoires et de même loi celle des paramètres) de taille N des p paramètres :

$$(X_1^k, \dots, X_p^k)_{k=1..N} \quad (X_1'^k, \dots, X_p'^k)_{k=1..N}$$

On définit ensuite

$$y_k = f(X_1^k, \dots, X_p^k), \quad y'_k = f(X_1'^k, \dots, X_{i-1}'^k, X_i^k, X_{i+1}'^k, \dots, X_p'^k), \quad \forall k = 1, \dots, N$$

L'estimateur est alors donné par

$$\hat{S}_i = \frac{\overline{yy'} - \bar{y} \cdot \bar{y'}}{\bar{y}^2 - \bar{y}^2} \quad (2.6)$$

où l'on définit la moyenne empirique $\bar{\phi}$ d'un vecteur $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ par

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_k$$

Il existe également d'autres estimateurs que celui-ci, on en verra quelques uns par la suite. Il existe également d'autres méthodes d'estimation des indices. Sans rentrer dans les détails, on peut citer la méthode FAST (voir Tissot (2012) pour une approche récente et les références historiques) et les polynômes de chaos (Ghanem and Spanos, 2003). On renvoie à la thèse Janon (2012) pour plus de détails sur ces sujets.

2.2.2 Utilisation de métamodèles pour estimer les indices de Sobol : quelle perte d'information ?

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article [9], en collaboration avec C. Prieur et A. Janon, dans le cadre de sa thèse.

Présentation du problème

Dans ce travail on estime l'indice de Sobol S_i avec l'estimateur (2.6) proposé par Sobol (2001). D'un point de vue pratique, il est souvent difficile de faire un grand nombre de runs du modèle, pour calculer les y_k , car le modèle est en général assez coûteux. Dans ces cas là, on remplace le modèle f par une approximation \tilde{f} , appelée métamodèle, plus rapide à calculer. Par exemple, on a vu dans la partie précédente que la réduction de dimension permettait de construire un tel métamodèle, mais il existe d'autres méthodes d'approximation, notamment stochastiques (krigeage, régression, etc.). L'estimateur qui nous intéresse s'écrit ainsi :

$$\hat{S}_i = \frac{\overline{\tilde{y}\tilde{y}'} - \bar{\tilde{y}} \cdot \bar{\tilde{y}'}}{\overline{\tilde{y}^2} - \bar{\tilde{y}}^2}$$

où les vecteurs \tilde{y} et \tilde{y}' sont définis avec le métamodèle au lieu du modèle complet :

$$\tilde{y}_k = \tilde{f}(X_1^k, \dots, X_p^k), \quad \tilde{y}'_k = \tilde{f}(X_1'^k, \dots, X_{i-1}'^k, X_i^k, X_{i+1}'^k, \dots, X_p'^k), \quad \forall k = 1, \dots, N$$

L'article [9] consiste à répondre à la question suivante : peut-on quantifier l'erreur entre l'estimateur \hat{S}_i et la vraie valeur de l'indice ? On distingue deux sources d'erreur : la première vient de l'usage du métamodèle à la place du modèle complet (erreur de métamodèle) ; la deuxième vient de l'approximation par Monte-Carlo avec un échantillon de taille N (erreur d'échantillonnage).

Travaux antérieurs. Il existe peu de travaux qui quantifient cette erreur d'estimation, en particulier l'erreur due au métamodèle, bien que la plupart des calculs d'estimations d'indice de sensibilité soient menés avec des métamodèles. On peut citer Marrel et al. (2009), qui proposent une estimation de l'erreur dans le cas d'un métamodèle de krigeage.

Storlie et al. (2009) proposent aussi l'estimation de cette erreur, en utilisant une approche basée sur le bootstrap (Efron, 1979). On reprend ci-dessous la description de la méthode donnée dans Janon (2012). On se donne un échantillon d'apprentissage

$$\mathcal{D} = \{(\mathbf{X}^1, f(\mathbf{X}^1)), \dots, (\mathbf{X}^n, f(\mathbf{X}^n))\}$$

qui sert à construire un métamodèle $\tilde{f}_{\mathcal{D}}$. On répète ensuite pour $r = 1, \dots, R$ les étapes suivantes :

1. on tire de manière équiprobable avec remise dans $(\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ un échantillon de taille n $(\mathbf{X}^{*1}, \dots, \mathbf{X}^{*n})$;
2. on tire de manière équiprobable avec remise dans les résidus

$$\{\tilde{f}(\mathbf{X}^k) - f(\mathbf{X}^k), k = 1, \dots, n\}$$

un échantillon de résidus de taille n (e^{*1}, \dots, e^{*n}) ;

3. on calcule une version bruitée de l'échantillon d'apprentissage

$$\mathcal{D}^* = \{(\mathbf{X}^{*1}, \tilde{f}(\mathbf{X}^{*1}) + e^{*1}), \dots, (\mathbf{X}^{*n}, \tilde{f}(\mathbf{X}^{*n}) + e^{*n})\};$$

4. avec cet échantillon on fabrique un nouveau métamodèle $\tilde{f}_{\mathcal{D}^*}$, et avec ce métamodèle on calcule une réplication \widehat{S}_i^r de l'estimateur.

Ensuite on utilise l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{\widehat{S}_i^1, \dots, \widehat{S}_i^R\}$$

pour construire un intervalle de confiance pour S_i . Cette méthode est plus générale que la précédente, car elle peut s'appliquer à différents types de métamodèles. Cependant elle est très coûteuse, notamment à cause de l'étape 4 qui nécessite de construire un nouveau métamodèle à partir du nouvel échantillon.

Quantification des erreurs d'estimation

Erreur de métamodèle. Le point de départ de ce travail, pour pouvoir calculer numériquement l'erreur commise, est de pouvoir disposer d'une borne d'erreur sur le métamodèle. En se basant sur nos travaux sur les bases réduites, on est parti du principe qu'on pouvait disposer d'une borne d'erreur :

$$|f(\mathbf{X}) - \tilde{f}(\mathbf{X})| \leq \varepsilon(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X}$$

où on a noté pour simplifier $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ le vecteur des paramètres d'entrée du modèle. Pour un élément \mathbf{X}^k de l'échantillon cela s'écrit :

$$|y_k - \tilde{y}_k| \leq \varepsilon(\mathbf{X}^k) = \varepsilon_k$$

On commence par la remarque suivante : \widehat{S}_i est la pente de la régression linéaire des y'_k sur les y_k :

$$\widehat{S}_i = \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^N ((y'_k - \bar{y}') - a(y_k - \bar{y}))^2 = \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} R(a, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \bar{y}, \bar{y}')$$

où on a noté $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ l'échantillon (et pareil pour \mathbf{y}'). L'idée est ensuite d'écrire que chaque y_k est dans l'intervalle $[\tilde{y}_k - \varepsilon_k; \tilde{y}_k + \varepsilon_k]$ et de produire un encadrement de $R(a, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \bar{y}, \bar{y}')$. On en déduit ensuite un encadrement

$$\widehat{S}_i^m \leq \widehat{S}_i \leq \widehat{S}_i^M$$

Dans le cas où ε est grand, cette dernière méthode est assez pessimiste. En supposant un peu plus de régularité sur la fonction f (ce qui est le cas en général, car les modèles considérés sont souvent assez réguliers), on propose également une version lissée de cet encadrement afin d'obtenir un encadrement plus fin.

Erreur d'échantillonnage. Pour estimer cette erreur, on utilise la méthode du bootstrap (voir plus haut), appliquée directement aux estimateurs \widehat{S}_i^m et \widehat{S}_i^M . Les répliques permettent de construire deux intervalles de confiance : $[I_1^m, I_2^m]$ pour \widehat{S}_i^m et $[I_1^M, I_2^M]$ pour \widehat{S}_i^M , ce qui nous donne un intervalle $[I_1^m, I_2^M]$ pour S_i .

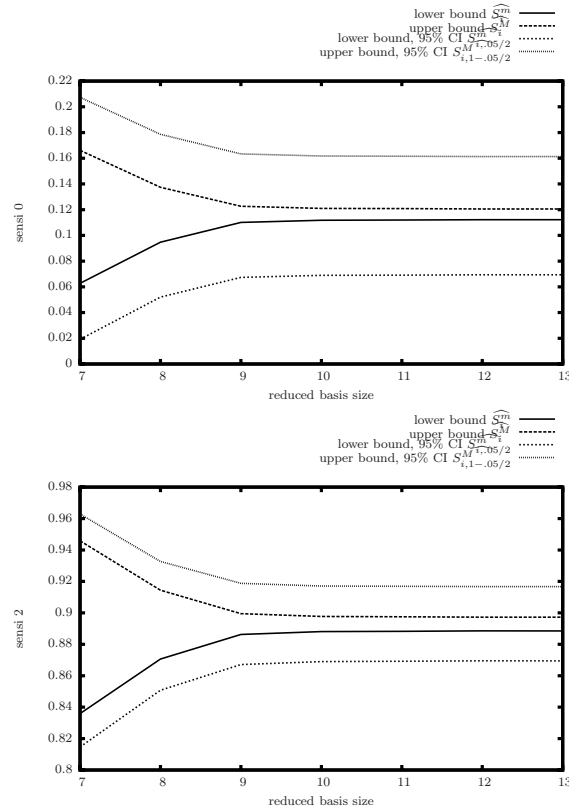


FIGURE 2.6 – Convergence des intervalles de confiance pour l'estimation des indices de sensibilité, à gauche pour ν , à droite pour u_{0m} . En ordonnée apparaissent les bornes \hat{S}_i^m et \hat{S}_i^M , ainsi que les extrémités des intervalles de confiance à 95%. En abscisses, la taille de la base réduite. La taille de l'échantillon Monte-Carlo est fixée à $N = 2000$.

Application

La méthode pour construire les intervalles de confiance est appliquée à l'équation de Burgers visqueuse paramétrique que l'on a vue au paragraphe 2.1.2. On considère pour commencer que seuls deux paramètres sont inconnus, la viscosité ν et u_{0m} dans la condition initiale $u_0(x) = u_{0m} + 5 \sin(x/2)$. On suppose que ν varie entre 1 et 20 et que u_{0m} entre 0 et 0.3, que les deux paramètres sont indépendants et suivent des lois uniformes sur ces intervalles. Comme ce modèle est moins coûteux qu'un modèle géophysique 3D, on a pu calculer des intervalles de confiance très précis pour les indices de sensibilité à ces deux paramètres :

$$S_\nu \in [0.0815; 0.0832], \quad S_{u_{0m}} \in [0.9175; 0.9182]$$

qui nous servent de référence pour la suite.

Intervalles de confiance et probabilité de couverture. Avec une base réduite à $n = 9$ éléments et une taille d'échantillon Monte-Carlo $N = 300$ on peut calculer un intervalle de confiance à 95% selon la méthode présentée plus haut. Si l'intervalle de confiance est parfait, cela signifie que la probabilité de couverture (ie la probabilité que la vraie valeur soit effectivement dans l'intervalle) vaut 0.95. Afin de valider ceci, on peut répéter la

méthode 100 fois et regarder combien de fois l'intervalle de confiance contient effectivement le vrai indice, ce qui nous donne une probabilité de couverture empirique. La table ci-dessous présente les résultats et permet de valider la méthode :

Paramètre	Intervalle de confiance moyen	Probabilité de couverture empirique
ν	[0.0139 ; 0.2083]	0.91
u_{0m}	[0.8421 ; 0.9491]	0.87

Convergence. La figure 2.6 présente l'évolution des bornes \hat{S}_i^m et \hat{S}_i^M en fonction de la taille de la base réduite, pour une taille d'échantillon Monte-Carlo fixée. On voit ainsi que l'erreur due au métamodèle décroît vite avec la taille de la base réduite. La largeur de l'intervalle de confiance reste grande car l'erreur d'échantillonnage est fixée. Notez que les intervalles $[\hat{S}_i^m; \hat{S}_i^M]$ ne tiennent pas compte de l'erreur Monte-Carlo et ne contiennent donc pas, en général, la vraie valeur de l'indice.

La fin de l'article [9] présente d'autres applications : au même modèle de Burgers avec davantage de paramètres variables, et à un autre type de modèle (interpolation à noyaux). Toutes deux mettent en évidence les bonnes performances de l'intervalle de confiance proposé, notamment par rapport aux méthodes existant dans la littérature.

2.2.3 Etude asymptotique de l'estimation d'indices de Sobol

Ce paragraphe résume les résultats contenus dans l'article [11], produit d'un travail en collaboration avec F. Gamboa, A. Lagnoux et T. Klein de Toulouse, avec C. Prieur et A. Janon, dans le cadre de la thèse de ce dernier et de l'ANR COSTA-BRAVA.

Présentation

Le cadre de ce travail est l'étude des propriétés asymptotiques de deux estimateurs de Monte-Carlo pour les indices de Sobol. Plus précisément, on s'intéresse au comportement asymptotique des deux erreurs (de métamodèle et d'échantillonnage) lorsqu'à la fois la taille de l'échantillon Monte-Carlo et celle de l'échantillon d'apprentissage pour le métamodèle tendent vers l'infini.

Les notions sous-jacentes qui nous intéressent sont la normalité et l'efficacité asymptotique. La première mesure la convergence de l'estimateur vers le vrai indice, ce qui permet de justifier des intervalles de confiance asymptotiques. La deuxième permet de parler d'optimalité d'un estimateur, en un certain sens, et ainsi d'obtenir des intervalles de confiance les plus précis possible.

Notations. On s'intéresse à un modèle du type

$$Y = f(X, Z)$$

où $X \in \mathbb{R}^{p_1}$ et $Z \in \mathbb{R}^{p_2}$ sont des variables aléatoires indépendantes que l'on appelle les paramètres d'entrée. On note $p = p_1 + p_2$ le nombre total de paramètres. Si Y est de variance non nulle et de carré intégrable, on s'intéresse à l'indice de sensibilité par rapport à X :

$$S^X = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))}{\text{Var}(Y)} \in [0, 1]$$

Si on note $Y^X = f(X, Z')$ où Z' est une copie indépendante de Z , on peut remarquer que

$$S^X = \frac{\text{Cov}(Y, Y^X)}{\text{Var}(Y)}$$

Le premier estimateur que l'on considère est le suivant :

$$S_N^X = \frac{\frac{1}{N} \sum Y_i Y_i^X - \left(\frac{1}{N} \sum Y_i\right) \left(\frac{1}{N} \sum Y_i^X\right)}{\frac{1}{N} \sum Y_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum Y_i\right)^2}$$

avec pour $i = 1, \dots, N$:

$$Y_i = f(X_i, Z_i), \quad Y_i^X = f(X_i, Z'_i),$$

où $\{(X_i, Z_i)\}_{i=1, \dots, N}$ et $\{(X_i, Z'_i)\}_{i=1, \dots, N}$ sont deux échantillons indépendants et de même loi celle (X, Z) , avec $\{Z_i\}_i$ indépendant de $\{Z'_i\}_i$.

Le deuxième estimateur est le suivant :

$$T_N^X = \frac{\frac{1}{N} \sum Y_i Y_i^X - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{Y_i + Y_i^X}{2}\right]\right)^2}{\frac{1}{N} \sum \left[\frac{Y_i^2 + (Y_i^X)^2}{2}\right] - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{Y_i + Y_i^X}{2}\right]\right)^2}$$

Normalité asymptotique

On donne deux résultats de normalité asymptotique : le premier lorsque l'estimateur est calculé avec le modèle exact, le second avec un métamodèle.

Avec un modèle exact. On établit d'abord un résultat de consistance, c'est-à-dire la convergence presque sûre (*a.s.* pour *almost sure*) des estimateurs vers les indices :

$$S_N^X \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a.s.} S^X \quad \text{et} \quad T_N^X \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a.s.} S^X$$

On a ensuite la proposition suivante, de normalité asymptotique.

Supposons que $\mathbb{E}(Y^4) < \infty$. Alors on a les convergences en loi (\mathcal{L}) :

$$\sqrt{N} (S_N^X - S^X) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \sigma_S^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{N} (T_N^X - S^X) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \sigma_T^2)$$

avec

$$\sigma_S^2 = \frac{\text{Var}((Y - \mathbb{E}(Y))[(Y^X - \mathbb{E}(Y)) - S^X(Y - \mathbb{E}(Y))])}{(\text{Var}(Y))^2}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\text{Var}((Y - \mathbb{E}(Y))(Y^X - \mathbb{E}(Y)) - S^X/2((Y - \mathbb{E}(Y))^2 + (Y^X - \mathbb{E}(Y))^2))}{(\text{Var}(Y))^2}.$$

avec $\sigma_T \leq \sigma_S$ (et égalité si et seulement si $S^X \in \{0, 1\}$).

Avec un métamodèle. On suppose cette fois que l'on dispose d'un métamodèle peu coûteux et approché pour calculer Y :

$$\tilde{Y} = \tilde{f}(X, Z) = f(X, Z) + \delta,$$

où la perturbation $\delta = \delta(X, Z, \xi)$ est fonction d'une variable aléatoire ξ indépendante de X et Z . Comme précédemment, on définit l'indice approché :

$$\tilde{S}^X = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(\tilde{Y}|X))}{\text{Var}(\tilde{Y})}$$

et les deux estimateurs associés

$$\begin{aligned}\tilde{S}_N^X &= \frac{\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i \tilde{Y}_i^X - \left(\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i\right) \left(\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i^X\right)}{\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i\right)^2} \\ \tilde{T}_N^X &= \frac{\frac{1}{N} \sum \tilde{Y}_i \tilde{Y}_i^X - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{\tilde{Y}_i + \tilde{Y}_i^X}{2}\right]\right)^2}{\frac{1}{N} \sum \left[\frac{\tilde{Y}_i^2 + (\tilde{Y}_i^X)^2}{2}\right] - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{\tilde{Y}_i + \tilde{Y}_i^X}{2}\right]\right)^2}\end{aligned}$$

On commence d'abord par une remarque : si δ ne dépend pas de N (par exemple si on envisage de conserver le même métamodèle alors qu'on grandit la taille de l'échantillon Monte-Carlo), alors en général les estimateurs \tilde{S}_N^X et \tilde{T}_N^X ne sont pas consistants pour estimer S^X . On suppose donc désormais que δ dépend de N , on note δ_N , et on suppose également que $\text{Var} \delta_N$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. On s'intéresse alors à la convergence normale de $\sqrt{N}(\tilde{S}_N^X - S^X)$ en fonction de la vitesse de convergence de $\text{Var} \delta_N$ vers 0. On a le théorème suivant.

On définit

$$\begin{aligned}C_{\delta,N} &= 2\text{Var}(Y)^{1/2} [\text{Corr}(Y, \delta_N^X) - \text{Corr}(Y, Y^X)\text{Corr}(Y, \delta_N)] \\ &\quad + \text{Var}(\delta_N)^{1/2} [\text{Corr}(\delta_N, \delta_N^X) - \text{Corr}(Y, Y^X)]\end{aligned}$$

où $\delta_N^X = \delta_N(X, Z')$ et $\text{Corr}(A, B)$ est la corrélation entre A et B (covariance normalisée par les écarts-types). On suppose que $C_{\delta,N}$ ne converge pas vers 0. Alors

1. Si $\text{Var}(\delta_N) = o\left(\frac{1}{N}\right)$, alors \tilde{S}_N^X et \tilde{T}_N^X sont asymptotiquement normaux pour estimer S^X :

$$\sqrt{N}(\tilde{S}_N^X - S^X) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{N}(\tilde{T}_N^X - S^X) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \sigma_T^2).$$

2. Si $N\text{Var}(\delta_N) \rightarrow \infty$, alors ils ne sont pas asymptotiquement normaux.
3. Si $C_{\delta,N}$ converge vers une constante C et il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $\text{Var}(\delta_N) = \frac{\gamma}{CN} + o\left(\frac{1}{N}\right)$, alors :

$$\sqrt{N}(\tilde{S}_N^X - S^X) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(\gamma, \sigma_S^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{N}(\tilde{T}_N^X - S^X) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(\gamma, \sigma_T^2)$$

Bien sûr, si $C_{\delta,N}$ converge vers 0, alors on a la normalité asymptotique pour \tilde{S}_N^X et \tilde{T}_N^X .

Les preuves de ces résultats sont disponibles dans [11].

Efficacité asymptotique

Je n'ai pas contribué aux résultats d'efficacité asymptotique. En quelques mots, la notion d'efficacité est la suivante. Supposons qu'on a un estimateur S_N , qui forme donc pour $N \in \mathbb{N}$ une suite d'estimateurs $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, pour une variable S . Si S_N est asymptotiquement normale pour S , alors on a

$$\sqrt{N}(S_N - S) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ceci nous permet de construire des intervalles de confiance asymptotiques pour S dont la largeur est σ . La notion d'efficacité asymptotique s'applique à la suite qui produit une variance asymptotique la plus petite possible (et donc l'intervalle de confiance le plus étroit, donc le plus précis). En réalité, la notion d'efficacité est plus complexe, car l'optimalité a lieu sur un sous-ensemble de suites d'estimateurs dites régulières, on renvoie à Janon (2012) et à van der Vaart (1998) pour plus de détails. Dans l'article [11], on montre que sous certaines conditions les suites d'estimateurs $(T_N^X)_N$ et $(\tilde{T}_N^X)_N$ sont asymptotiquement efficaces pour estimer S^X .

Illustrations numériques

On illustre les résultats précédents avec la fonction d'Ishigami (voir Ishigami and Homma (1990))

$$f(X_1, X_2, X_3) = \sin X_1 + 7 \sin^2 X_2 + 0.1 X_3^4 \sin X_1$$

où $(X_j)_{j=1,2,3}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[-\pi; \pi]$.

On note S^1 l'indice de Sobol S^{X_1} avec $Z = (X_2, X_3)$, et on note de même S^2 et S^3 . Les valeurs exactes de ces indices sont connues :

$$S^1 = 0.3139, \quad S^2 = 0.4424, \quad S^3 = 0.$$

Pour illustrer les résultats précédents on va procéder ainsi : on construit un intervalle de confiance asymptotique de niveau 0.95, puis pour valider cet intervalle on calcule sa probabilité de couverture empirique (comme on l'a vu précédemment au paragraphe 2.2.2) en répliquant $R = 1000$ intervalles de confiance. La proportion d'intervalles contenant la vraie valeur donne la couverture empirique, que l'on veut proche de 0.95 pour valider la construction de l'intervalle.

Modèle exact. On commence par utiliser les estimateurs S_N^X et T_N^X avec le modèle exact. La figure 2.7 montre les probabilités de couverture empirique obtenue en fonction de N . On constate que ces probabilités tendent bien vers 0.95 quand N tend vers l'infini, ce qui illustre la fiabilité des intervalles de confiance asymptotiques construits.

La figure 2.8 compare l'efficacité de S_N et T_N en montrant la largeur de l'intervalle de confiance (multipliée par \sqrt{N}) en fonction de N . On constate bien que T_N est meilleur que S_N , sauf pour S^3 pour lequel on a $S^3 = 0$.

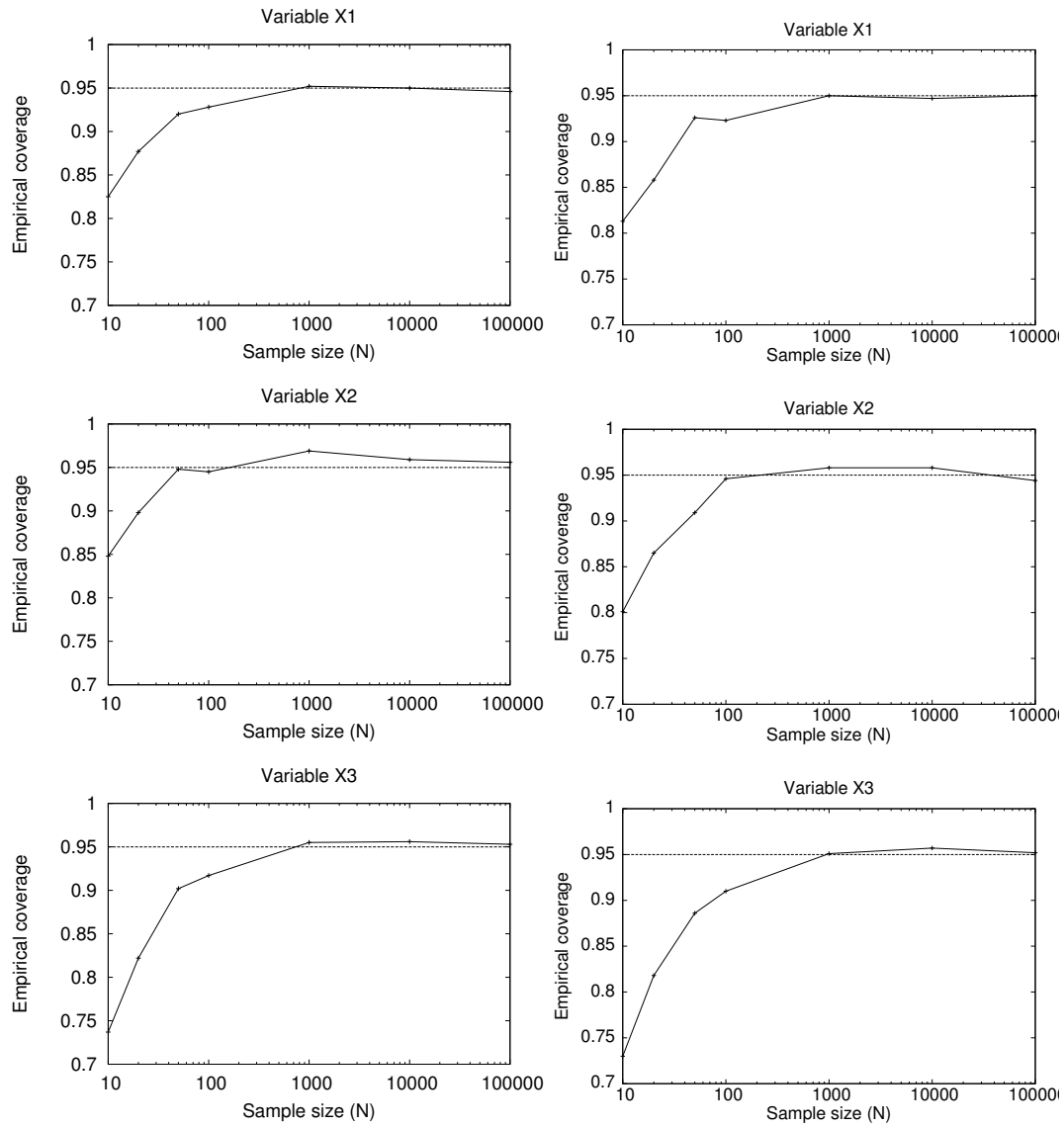


FIGURE 2.7 – Probabilité de couverture empirique pour les intervalles de confiance asymptotiques pour les indices S^1 (en haut), S^2 (au milieu) et S^3 (en bas), en fonction de la taille de l'échantillon Monte-Carlo N , pour les estimateurs S_N (à gauche) et T_N (à droite) avec le modèle exact.

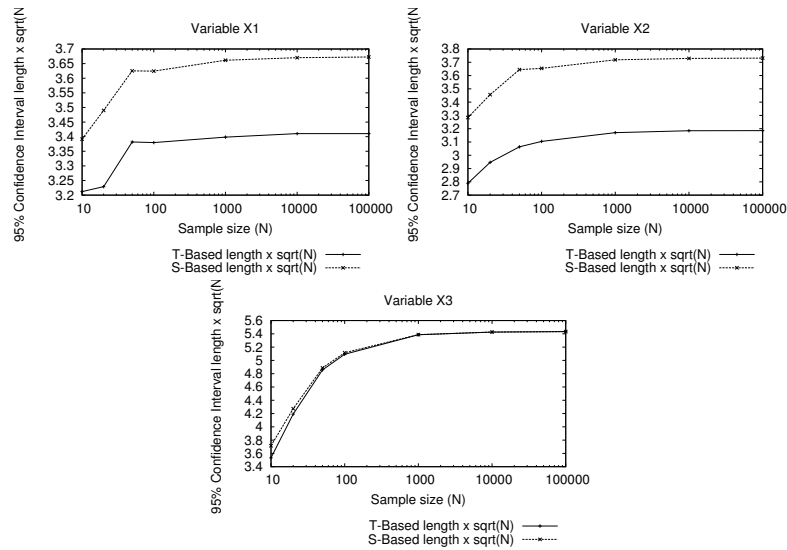


FIGURE 2.8 – Largeur des intervalles de confiance (multipliée par \sqrt{N}) pour S^1 , S^2 et S^3 , en fonction de N , pour les estimateurs T_N (ligne continue) et S_N (en pointillés) avec le modèle exact.

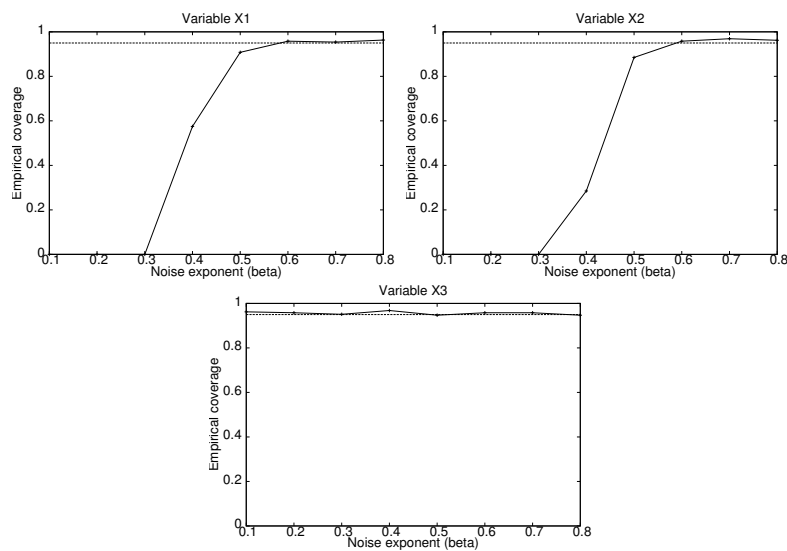


FIGURE 2.9 – Couverture empirique des intervalles de confiance asymptotique pour S^1 , S^2 et S^3 , en fonction du niveau de bruit β , pour le modèle perturbé par un bruit gaussien \tilde{f}_N .

Modèle perturbé. On considère ensuite un modèle perturbé par un bruit gaussien

$$\tilde{f}_N = f + \frac{5\xi}{N^{\beta/2}}$$

où $\beta > 0$ et ξ suit une loi normale centrée réduite. On a $\delta_N = 5\frac{\xi}{N^{\beta/2}}$ et $\text{Var } \delta_N \propto N^{-\beta}$, puis

$$C_\delta = O\left(\text{Var}(\delta_N)^{1/2}\right) = O\left(N^{-\beta/2}\right),$$

La preuve du théorème nous dit que \tilde{S}_N est asymptotiquement normal pour S si $\beta > 1/2$. Pour X_1 et X_2 , on a la réciproque car $C_\delta \sim N^{-\beta/2}$. Pour X_3 , on a $C_\delta = 0$ et \tilde{S}_N est asymptotiquement normal pour S quel que soit $\beta > 0$. La figure 2.8 illustre ceci. On a fixé N assez grand et on trace la probabilité de couverture empirique en fonction de β . On voit alors que cette probabilité est proche de 0.95 dès que $\beta > 1/2$ pour S^1 et S^2 , et pour tout β pour S^3 .

Métamodèle de krigeage. On considère ensuite un métamodèle de krigeage, construit à partir d'un échantillon d'apprentissage de taille n . Plus n est grand plus le métamodèle est précis, mais plus il est coûteux à construire. Sans rentrer dans les détails (on renvoie à [11]), on arrive à montrer que, sous certaines hypothèses, le bruit d'un tel métamodèle vérifie

$$\text{Var } \delta \leq C e^{-kn^{1/p}}$$

où C et k sont des constantes. En appliquant ceci à la fonction d'Ishigami et en utilisant une régression exponentielle pour estimer les coefficients, on obtient

$$\text{Var}(\delta) \approx \hat{C} e^{-\hat{k}n^{1/3}}, \quad \hat{k} = 1.91$$

Ceci conduit à proposer la relation suivante entre n et N :

$$n = (a \ln N)^3$$

et le théorème nous dit que l'on a normalité asymptotique si $a > 1/\hat{k}$, autrement dit $a > 0.52$. Bien qu'on n'ait pas prouvé que cette condition est nécessaire et suffisante, on peut néanmoins étudier la probabilité de couverture empirique en fonction de a (sachant que la couverture théorique est encore de 0.95 ici) :

a	N	n	Proba de couverture empirique pour S^1	pour S^2	pour S^3
.4	3000	33	0.1	0	0.7
.4	4000	37	0.08	0	0.78
.4	6000	43	0.26	0.3	0.88
.4	10000	51	0.28	0.18	0.78
.4	20000	77	0.28	0.1	0.59
.6	3000	111	0.79	0.37	0.9
.6	4000	124	0.8	0.7	0.94
.6	10000	169	0.92	0.82	0.94
.6	20000	210	0.93	0.85	0.95
.7	3000	177	0.93	0.88	0.93
.7	4000	196	0.9	0.91	0.94
.7	6000	226	0.94	0.93	0.97
.8	4000	293	0.95	0.95	0.95

et on constate effectivement un changement de régime entre $a = 0.4$ et $a = 0.6$.

Régression non paramétrique. L'article propose également un autre type de métamodèle (régression non paramétrique) qui donne le même genre de résultat. L'avantage de ce métamodèle est qu'il n'est pas nécessaire de disposer du vrai modèle pour le construire, mais que des observations bruitées suffisent. L'inconvénient est que cette fois $n = N^a$, $a > 1.16$, ce qui nécessite une plus grande taille d'échantillon d'apprentissage pour que le métamodèle donne la normalité asymptotique des estimateurs.

2.3 Algorithme du nudging direct et rétrograde (BFN)

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux travaux [8] et [6] menés en collaboration avec D. Auroux et J. Blum (Nice) sur un nouvel algorithme d'assimilation de données, le nudging direct et rétrograde (BFN – Back and Forth Nudging).

2.3.1 Présentation

Nudging

L'algorithme du nudging direct et rétrograde (BFN) a été introduit récemment par Auroux and Blum (2005) comme une méthode d'assimilation de données extrêmement simple à mettre en œuvre. Cette méthode est basée sur le nudging, encore appelé relaxation newtonienne, ou observateur de Luenberger (cas linéaire). L'idée du nudging est de relaxer le modèle vers les observations, en ajoutant un terme de rappel dans le second membre de l'EDP du modèle. Si l'équation d'évolution du modèle s'écrit ainsi :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad 0 < t < T, \quad X(0) = s_0$$

et que l'on dispose d'observations $X^{\text{obs}}(t)$ via un opérateur d'observation C , alors le nudging s'écrit

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - K(C(X) - X^{\text{obs}}), \quad 0 < t < T, \quad X(0) = x_0$$

où K est un coefficient (ou une matrice) positif.

La théorie des observateurs permet de dire que, sous certaines conditions et pour un choix optimal de K , l'état X tend vers les observations, lorsque t tend vers l'infini. Pour les modèles de géophysique, ces hypothèses ne sont pas valides, et on veut des résultats en temps fini (la taille de la fenêtre d'assimilation est de quelques heures en météo et quelques semaines en océanographie). Cependant, le nudging a été utilisé avec un certain succès en météorologie (Hoke and Anthes, 1976) puis en océanographie (Verron and Holland, 1989; Blayo et al., 1994).

Algorithme du BFN

Le point de départ du BFN est le suivant : puisque l'on est limité à une fenêtre de temps finie, on voudrait pouvoir corriger ceci en effectuant plusieurs étapes de nudging successives, sur la même fenêtre de temps. Pour cela, on remarque qu'il faut disposer d'une condition initiale corrigée, que l'on propose d'obtenir par nudging rétrograde (Auroux, 2003) :

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = F(\tilde{X}) + K'(C(\tilde{X}) - X^{\text{obs}}), \quad T > t > 0, \quad \tilde{X}(T) = X(T)$$

où cette fois le modèle est résolu en inversant le sens du temps, en partant de la condition finale $X(T)$, et en changeant le signe de la relaxation. On obtient ainsi une nouvelle condition initiale $\tilde{X}(0)$ qui peut servir à initialiser une nouvelle étape de nudging.

L'algorithme du BFN s'écrit donc ainsi (Auroux and Blum, 2005) :

$$\begin{aligned} & \text{Initialiser } \tilde{X}_0(0) = x_0, \text{ puis itérer jusqu'à convergence, pour } k \geq 1 : \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t X_k = F(X_k) + K(X^{\text{obs}} - H(X_k)), \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0), \quad 0 < t < T, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{X}_k = F(\tilde{X}_k) - K'(X^{\text{obs}} - H(\tilde{X}_k)), \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T), \quad T > t > 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Une présentation approfondie de l'algorithme, notamment son interprétation variationnelle et son lien avec les observateurs, est disponible dans Auroux (2008).

2.3.2 Résultats théoriques négatifs

Ce paragraphe résume l'article [8], en collaboration avec D. Auroux (Nice).

Discussion

Comme peut s'en douter le lecteur qui tomberait pour la première fois sur l'algorithme du BFN appliqué à l'équation de la chaleur, l'équation rétrograde peut avoir de gros problèmes de stabilité en présence de viscosité. Les premiers articles applicatifs du BFN (Auroux and Blum, 2008; Auroux, 2009) montrent cependant de bonnes performances numériques du BFN pour des modèles de complexité variée (Lorenz, Burgers, quasi-géostrophique, Shallow-Water), même en présence de viscosité. Il s'avère cependant que les coefficients de viscosité sont très faibles, et les coefficients de nudging rétrogrades K' suffisamment fort pour compenser l'instabilité lié au laplacien rétrograde.

Avec D. Auroux, on a donc entrepris de faire l'étude théorique de la (non-)convergence de l'algorithme dans [8], au moins pour des équations de transport (linéaire et Burgers). On a réussi à prouver qu'en l'absence de viscosité on avait bien convergence. Par contre, en présence de viscosité on n'avait plus de convergence, voire plus de solution à l'équation rétrograde, sauf dans le cas très particulier où l'état est observé partout et en tout temps (ie $C = 1$, cas peu intéressant). On énonce ci-dessous les théorèmes obtenus dans le cas linéaire, on a le même genre de résultats dans le cas non-linéaire.

Equation de transport sans viscosité

Le cadre de travail est le suivant. On considère l'équation de transport

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_{\text{true}} + a(x) \partial_x u_{\text{true}} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega \\ u_{\text{true}}|_{x=0} = u_{\text{true}}|_{x=1}, \\ u_{\text{true}}|_{t=0} = u_{\text{true}}^0, \end{array} \right.$$

où Ω est le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} , $a(x) \in C^1(\Omega)$ et $u_{\text{true}}^0 \in C^1(\Omega)$ sont tous deux périodiques en espace. Sous ces hypothèses, on a existence et unicité de la solution $u_{\text{true}} \in C^1([0; T] \times \Omega)$.

On se donne ensuite des observations associées :

$$u_{\text{obs}}(t, x) = u_{\text{true}}(t, x), \text{ si } (t, x) \in \omega; \quad u_{\text{obs}}(t, x) = 0, \text{ si } (t, x) \notin \omega$$

$$\omega = \text{Support}(K) \subset [0, T] \times \Omega$$

Les constantes de nudging K et $K' \in C^1([0; T] \times \Omega)$ sont positives et peuvent dépendre de t et de x , et il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $K'(t, x) = \kappa K(t, x)$.

Les équations d'une étape du BFN s'écrivent

$$\begin{aligned} (F) \quad & \begin{cases} \partial_t u + a(x) \partial_x u &= -K(u - u_{\text{obs}}), \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1}, \\ u|_{t=0} &= u_0, \end{cases} \\ (B) \quad & \begin{cases} \partial_t \tilde{u} + a(x) \partial_x \tilde{u} &= K'(\tilde{u} - u_{\text{obs}}), \\ \tilde{u}|_{x=0} &= \tilde{u}|_{x=1}, \\ \tilde{u}|_{t=T} &= u(T), \end{cases} \end{aligned}$$

On note ensuite

$$(s, \psi(s, x))$$

les courbes caractéristiques de l'équation directe avec $K = 0$, de pied x au temps $s = 0$, i.e. telles que

$$(s, \psi(s, x))|_{s=0} = (0, x)$$

Les caractéristiques sont bien définies et ne s'intersectent pas sur $[0, T]$.

Avec ces hypothèses et notations, on peut alors énoncer le théorème suivante :

On a existence et unicité de solutions classique u et $\tilde{u} \in C^1([0; T] \times \Omega)$. On note

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) - u_{\text{true}}(t), \\ \tilde{w}(t) &= \tilde{u}(t) - u_{\text{true}}(t). \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant :

1. Si $K(t, x) = K$ constante en temps et en espace, alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\tilde{w}(t) = w(t) e^{(-K-K')(T-t)}.$$

2. Si $K(t, x) = K \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}(t)$ avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, alors on a :

$$\tilde{w}(0) = w(0) e^{(-K-K')(t_2-t_1)}.$$

3. Si $K(t, x) = K(x)$, alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\tilde{w}(t, \psi(t, x)) = w(t, \psi(t, x)) \exp \left(- \int_t^T K(\psi(s, x)) + K'(\psi(s, x)) ds \right).$$

Dans le dernier cas, l'erreur ne diminue que lorsque la caractéristique croise le support de $K(x)$. Quoi qu'il en soit, les équations du BFN sont bien posées, et si on a suffisamment d'observation en temps et en espace, l'erreur diminue (au moins dans les zones observées).

Equation de transport avec viscosité

On considère cette fois l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx} u + a(x) \partial_x u &= 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_{\text{true}}^0 \end{cases}$$

avec :

$$- a(x) \in W^{1,\infty}(\Omega);$$

- $\nu > 0$ constante ;
- $u_{\text{true}}^0 \in L^2(\Omega)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$.

On a alors existence et unicité de la solution $u_{\text{true}} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$. On utilise cette solution pour générer des observations u_{obs} comme précédemment.

On définit ensuite les coefficients de nudging ayant le même support ω que les observations : $K \in L^\infty([0; T] \times \Omega)$ et $K' \in L^\infty([0; T] \times \Omega)$ sont positives et il existe $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K'(t, x) = \kappa K(t, x)$, et on a $\text{Support}(K) = \text{Support}(K') = \omega \subset [0, T] \times [0, 1]$.

Une étape du BFN s'écrit de la même façon :

$$\begin{aligned} (F) \quad & \begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx} u + a(x) \partial_x u &= -K(u - u_{\text{obs}}), \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \end{cases} \\ (B) \quad & \begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \nu \partial_{xx} \tilde{u} + a(x) \partial_x \tilde{u} &= K'(\tilde{u} - u_{\text{obs}}), \\ \tilde{u}|_{x=0} = \tilde{u}|_{x=1} &= 0, \\ \tilde{u}|_{t=T} &= u(T), \end{cases} \end{aligned}$$

On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$ est donné. On a alors le théorème suivant :

L'équation directe (F) admet une unique solution $u \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

De plus :

1. Si $K(t, x) = K \in \mathbb{R}$, alors l'équation (B) admet une unique solution $\tilde{u} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$. De plus, si on note

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) - u_{\text{true}}(t), \\ \tilde{w}(t) &= \tilde{u}(t) - u_{\text{true}}(t), \end{aligned}$$

alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\tilde{w}(t) = e^{(-K-K')(T-t)} w(t)$$

2. Si $K(t, x) = K \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}(t)$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, alors l'équation (B) admet aussi une unique solution $\tilde{u} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et on a

$$\tilde{w}(0) = e^{(-K-K')(t_2-t_1)} w(0)$$

3. Si $K(t, x) = K(x)$, avec $\text{Support}(K) \subset [a, b]$ où $a < b$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 1$, alors l'équation rétrograde (B) est mal posée : il n'existe pas, en général, de solution \tilde{u} , même au sens des distributions.

Remarquons que l'existence de la solution rétrograde repose fermement sur l'hypothèse que l'on dispose d'observations complètes en espace, au moins pendant un certain temps. En pratique, ce n'est bien sûr pas réaliste, mais certaines observations (satellites notamment) ont néanmoins une très bonne couverture.

2.3.3 Amélioration de l'algorithme

Ce paragraphe résume l'article [6], en collaboration avec D. Auroux et J. Blum (Nice).

Point de départ

La plupart des modèles géophysiques que l'on utilise en météorologie et en océanographie comportent des termes visqueux. La viscosité intrinsèque du fluide est en générale tout petite, de sorte que l'on peut considérer que la solution exacte vérifie les équations non visqueuses. Cependant, en pratique on ajoute des termes visqueux pour permettre la paramétrisation des phénomènes sous-maille, autrement dit ceux qui ont lieu aux échelles non résolues par le modèle. Suite aux résultats négatifs [8] pour le BFN en présence de viscosité, on a proposé une amélioration de l'algorithme dans la note [6]. L'idée est tout simplement de considérer que la viscosité est un terme de paramétrisation numérique, et donc de changer son signe dans les équations rétrograde.

Algorithme du BFN diffusif

On se place dans le cadre des fluides géophysiques newtoniens (atmosphère, océan). On suppose que l'état du système vérifie l'équation suivante :

$$\partial_t X = F(X) + \nu \Delta X, \quad 0 < t < T, \quad X(0) = x_0$$

où l'on a explicité les termes visqueux sous la forme $\nu \Delta X$, en supposant que F contient uniquement des termes de transport (éventuellement non linéaire) et inclut également les conditions aux limites. L'opérateur d'observation est cette fois noté H , et on dispose d'observations $X_{obs}(t)$ que l'on compare à leur équivalent modèle $H(X(t))$.

Pour $k \geq 1$ l'algorithme du BFN diffusif (D-BFN) s'écrit

$$\begin{aligned} (F) \quad & \begin{cases} \partial_t X_k = F(X_k) + \nu \Delta X_k + K(X_{obs} - H(X_k)) \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0), \quad 0 < t < T \end{cases} \\ (B) \quad & \begin{cases} \partial_t \tilde{X}_k = F(\tilde{X}_k) - \nu \Delta \tilde{X}_k - K'(X_{obs} - H(\tilde{X}_k)) \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T), \quad T > t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le changement de signe de la diffusion rend le problème rétrograde en général bien posé, et on a alors convergence de l'algorithme (voir [6] pour une preuve dans un cadre idéalisé).

Applications

La note [6] illustre l'algorithme dans le cas élémentaire d'une équation de transport avec des observations complètes. Des tests plus complets ont été effectués dans l'article Auroux et al. (2013), où les auteurs proposent de comparer les algorithmes BFN et D-BFN (appelé BFN2 dans l'article) pour l'assimilation d'observations bruitées avec l'équation de Burgers sans choc. La figure 2.10 montre les erreurs RMS obtenues pour trois méthodes d'assimilation :

1. le BFN avec $\nu = 0$, autrement dit sur l'équation de Burgers non visqueuse
2. le BFN avec $\nu = 0.001$
3. le D-BFN avec la même viscosité $\nu = 0.001$

et pour trois jeux de données différents :

1. observations parfaites, disponibles tout les 4 points de grille et tous les 4 pas de temps

		$n_x=4$ $n_t=4$ Unnoisy	$n_x=10$ $n_t=10$ Unnoisy	$n_x=10$ $n_t=10$ Noisy (15%)
BFN with $\nu=0$	No. iterations	2	2	2
	Relative RMS (%)	0.11	0.15	7.70
	K	15	43	52
	K'	30	86	104
BFN with $\nu=0.001$	No. iterations	3	3	3
	Relative RMS (%)	0.15	0.34	8.62
	K	17	45	55
	K'	34	90	110
BFN2 with $\nu=0.001$	No. iterations	6	4	3
	Relative RMS (%)	0.48	0.34	7.28
	K	2	10	18
	K'	4	20	36

FIGURE 2.10 – Table de comparaison entre le BFN et le D-BFN pour l'équation de Burgers *sans choc* avec des observations discrètes et brutes, d'après Auroux et al. (2013) table 3.

		$n_x=4$ $n_t=4$ Unnoisy	$n_x=10$ $n_t=10$ Unnoisy	$n_x=10$ $n_t=10$ Noisy (15%)
BFN2 with $\nu=0.02$	No. iterations	3	3	3
	Relative RMS (%)	1.13	1.22	6.97
	K	8	20	20
	K'	16	40	40

FIGURE 2.11 – Table de résultat du D-BFN pour l'équation de Burgers *avec choc* avec des observations discrètes et brutes, d'après Auroux et al. (2013) table 6.

2. observations parfaites, disponibles tout les 10 points de grille et tous les 10 pas de temps
3. observations bruitées, disponibles tout les 10 points de grille et tous les 10 pas de temps

On constate que l'algorithme du D-BFN donne des résultats légèrement meilleurs dans le cas d'observations bruitées, et permet surtout d'utiliser des constantes de nudging plus faibles.

Plus intéressant, les auteurs considèrent ensuite l'équation de Burgers avec choc. Dans ce cas, le BFN ne converge pas, alors que le D-BFN donne de bons résultats (voir la figure 2.11).

2.4 Etude expérimentale de la méthode HUM pour l'équation des ondes

Ce paragraphe présente les travaux effectués en collaboration avec G. Lebeau (Nice) sur le contrôle de l'équation des ondes. L'idée de ce travail était à la fois de proposer une méthode numérique robuste et de l'utiliser pour illustrer quelques résultats théoriques récents. On commence par présenter le problème de contrôlabilité de l'équation des ondes et la méthode HUM, ensuite on décrit la méthode numérique et enfin on présente quelques résultats numériques. Ce qui suit est directement tiré des travaux [4] et [14].

2.4.1 Présentation

Contrôlabilité des ondes

Pour un point de départ $f = (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donné, le problème est de trouver une source $v(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ telle que la solution $u = S(v)$ de l'équation des ondes linéaires

$$\begin{cases} \square u = \chi v & \text{in }]0, +\infty[\times \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0 \\ (u|_{t=0}, \partial_t u|_{t=0}) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.7)$$

atteigne l'état $f = (u_0, u_1) = (u(T, \cdot), \partial_t u(T, \cdot))$ au temps T , où :

- $\square = \partial_{tt}^2 - \Delta$ est le d'alembertien (avec vitesse $c = 1$)
- Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ,
- le domaine de contrôle U est un ouvert non vide de Ω ,
- $\chi(t, x) = \psi(t)\chi_0(x)$ où χ_0 est une fonction L^∞ à valeurs réelles sur $\bar{\Omega}$, telle que $\text{Support}(\chi_0) = \bar{U}$ et $\chi_0(x)$ continue et positive pour $x \in U$, $\psi \in C^\infty([0, T])$ et $\psi(t) > 0$ sur $]0, T[$.

L'espace atteignable en temps T est un sous-espace de $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{R}_T = \{f = (u_0, u_1) \in H, \exists v, (S(v)(T, \cdot), \partial_t S(v)(T, \cdot)) = (u_0, u_1)\}.$$

Alors on a contrôlabilité approchée si \mathcal{R}_T est dense dans H et contrôlabilité exacte si $\mathcal{R}_T = H$.

Méthode HUM

La méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) de Lions (1988) consiste à choisir la fonction v de norme L^2 minimale. Alors v est de la forme $\chi \partial_t w$ où w est solution de l'équation duale :

$$\begin{cases} \square w = 0 & \text{in }]0, +\infty[\times \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0 \\ (w|_{t=T}, \partial_t w|_{t=T}) = (w_0, w_1) = h \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

L'opérateur de contrôle HUM est alors défini par :

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \\ f = (u_0, u_1) & \mapsto & h = (w_0, w_1) \end{array}$$

Notons $A = A^*$ l'opérateur de $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ défini par

$$iA = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $\lambda = \sqrt{-\Delta_D}$. Alors l'équation des ondes (2.7) se réécrit $(\partial_t - iA)u = B(t)v$ avec

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi(t, \cdot)\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad B^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1}\chi(t, \cdot) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait qu'on a équivalence entre la contrôlabilité exacte et la condition :

$$\exists C > 0, M_T = \int_0^T e^{itA} B(T-t) B^*(T-t) e^{-itA^*} dt \geq C \text{Id}$$

et dans ce cas, on a :

$$\Lambda = M_T^{-1}$$

Condition de contrôle géométrique

On se place sous les hypothèses précédentes pour $\chi(t, x)$, et sous une condition liant les rayons optiques de l'équation des ondes et la frontière $\partial\Omega$. On rappelle ensuite le théorème de Bardos et al. (1992) :

Si χ et T sont tels que la *condition de contrôle géométrique* est vérifiée, alors l'opérateur M_T est un isomorphisme, i.e. on a la contrôlabilité exacte ($\mathcal{R}_T = H$). La condition de contrôle géométrique (GCC) s'énonce ainsi : toute géodésique de Ω se déplaçant à vitesse 1 et partant à $t = 0$ rencontre l'ouvert $U = \{x \in \Omega, \chi_0(x) \neq 0\}$ en temps $t < T$.

2.4.2 Méthode numérique

Précédemment, Glowinski et al. (1990) commencent par discrétiser l'équation des ondes continues, et ensuite calculent le contrôle pour le système discret. Mais Zuazua (2002, 2005) a montré que le modèle discret n'est pas uniformément contrôlable quand la taille de la grille tend vers zéro. Ainsi, l'opération "discrétiser puis contrôler" n'est pas équivalente à "contrôler puis discrétiser". Des approches multi-grilles ont été développées pour pallier ce problème (Glowinski et al., 2008; Asch and Lebeau, 1998). Ici on propose de procéder directement à l'opération "contrôler puis discrétiser", autrement dit discrétiser directement l'opérateur de contrôle Λ , par une méthode spectrale, que l'on résume brièvement ci-dessous (on renvoie à [4] pour les détails).

Soit (ω_j^2) la suite des valeurs propres de $-\Delta_D$ et (e_j) la base orthonormée de vecteurs propres de $L^2(\Omega)$ associée :

$$-\Delta e_j = \omega_j^2 e_j, e_j|_{\partial\Omega} = 0$$

Pour une fréquence de coupure ω , on définit le sous-espace

$$L_\omega^2 = \text{Span}\{e_j, \omega_j \leq \omega\}$$

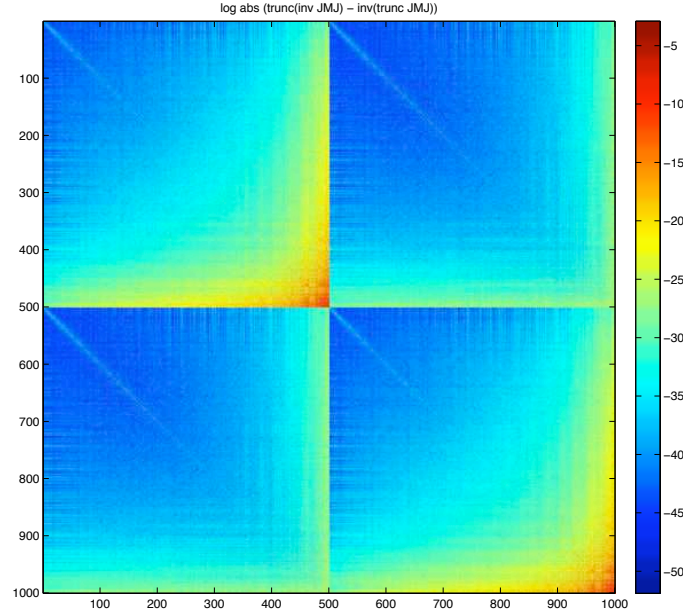


FIGURE 2.12 – Logarithme des coefficients de la matrice $((M_T)^{-1})_{\omega} - ((M_T)_{\omega})^{-1}$, où M_T est calculée avec 2000 valeurs propres, et la fréquence de coupure ω vaut la 500ème valeur propre.

et on note Π_{ω} le projecteur orthogonal sur L_{ω}^2 :

$$H_{\omega} = \Pi_{\omega}(H_0^1 \times L^2)$$

On définit enfin la matrice $M_{T,\omega}$:

$$M_{T,\omega} = \Pi_{\omega} M_T \Pi_{\omega}, \quad M_{T,\omega,n,m} = (M_T \phi_n | \phi_m)_H$$

où (ϕ_n) est une base orthonormée de H_{ω} .

On rappelle que $\Lambda = M_T^{-1}$ et $M_{T,\omega} = \Pi_{\omega} M_T \Pi_{\omega}$.

Alors on peut montrer que $M_{T,\omega}$ est inversible sur H_{ω} et $\|M_{T,\omega}^{-1}\|$ est borné uniformément sur ω . Sous la condition de contrôle géométrique, on a le résultat suivant :

Il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in H$ on a :

$$\|\Lambda(f) - M_{T,\omega}^{-1}(f_{\omega})\|_H \leq c \|f - f_{\omega}\|_H + \|\Lambda(f_{\omega}) - M_{T,\omega}^{-1}(f_{\omega})\|_H$$

avec $f_{\omega} = \Pi_{\omega} f$ et $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|\Lambda(f_{\omega}) - M_{T,\omega}^{-1}(f_{\omega})\|_H = 0$.

En d'autres termes, l'inversion et la discrétisation de Galerkin "commutent presque" pour M_T . La figure 2.12 illustre ce résultat : elle représente le logarithme des valeurs absolues des coefficients de la matrice $((M_T)^{-1})_{\omega} - ((M_T)_{\omega})^{-1}$ (tous inférieurs à 10^{-4}).

2.4.3 Etude expérimentale de l'opérateur HUM

Nous avons implémenté en fortran 90 (ainsi qu'en Matlab) la méthode présentée plus haut.

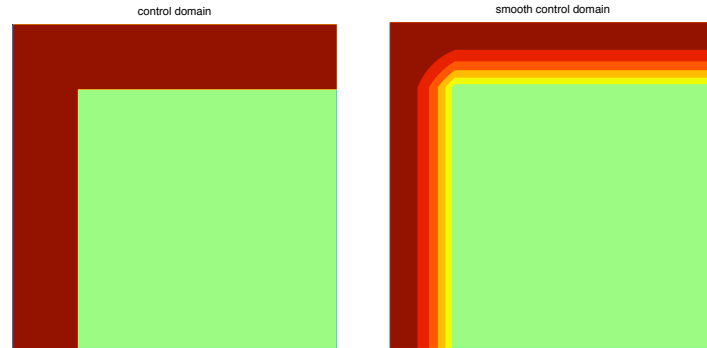


FIGURE 2.13 – Géométries (vert) et domaines de contrôle (marron), sans (à gauche) et avec (à droite) lissage.

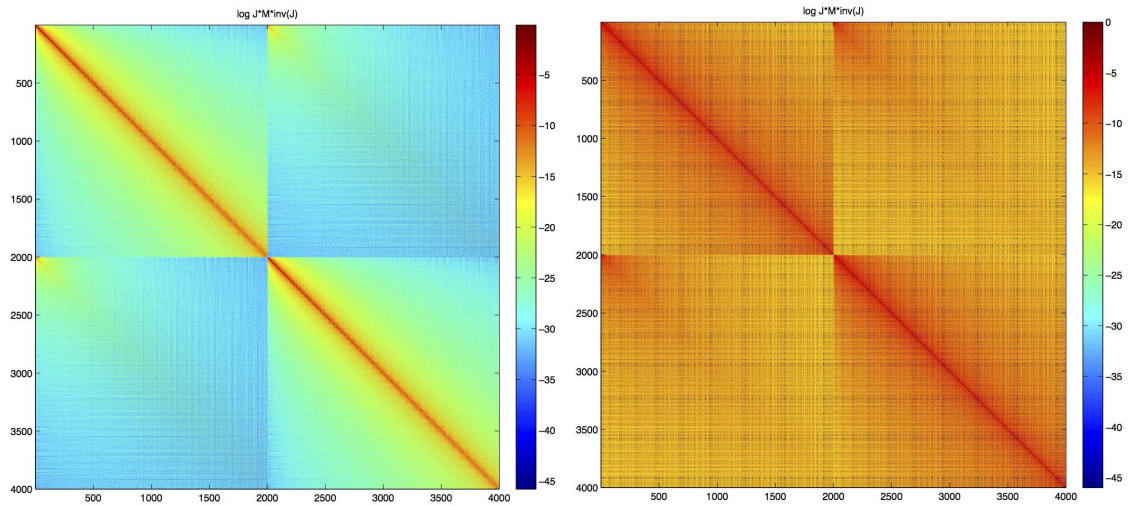


FIGURE 2.14 – Effet du lissage sur la matrice $M_{T,\omega}$. Le logarithme des coefficients de $M_{T,\omega}$, pour la carré avec la condition GCC, est dessiné à gauche avec un contrôle lisse et à droite avec un contrôle non lisse. L'échelle de couleur est la même pour les deux images.

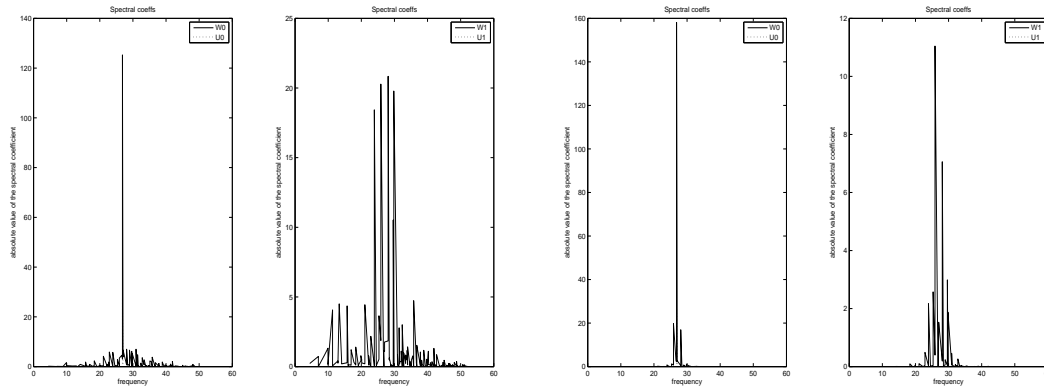


FIGURE 2.15 – Expérience de localisation en fréquence dans le carré. La décomposition spectrale de (w_0, w_1) (gauche, droite) est représentée, sans lissage (deux graphes de gauche) et avec lissage (deux graphes de droite). En abscisses sont les valeurs propres, en ordonnées la valeur du coefficient associé à cette valeur propre. La cible u_0 vaut le 50ème vecteur propre, et la valeur propre associée vaut environ 26.8, $u_1 = 0$.

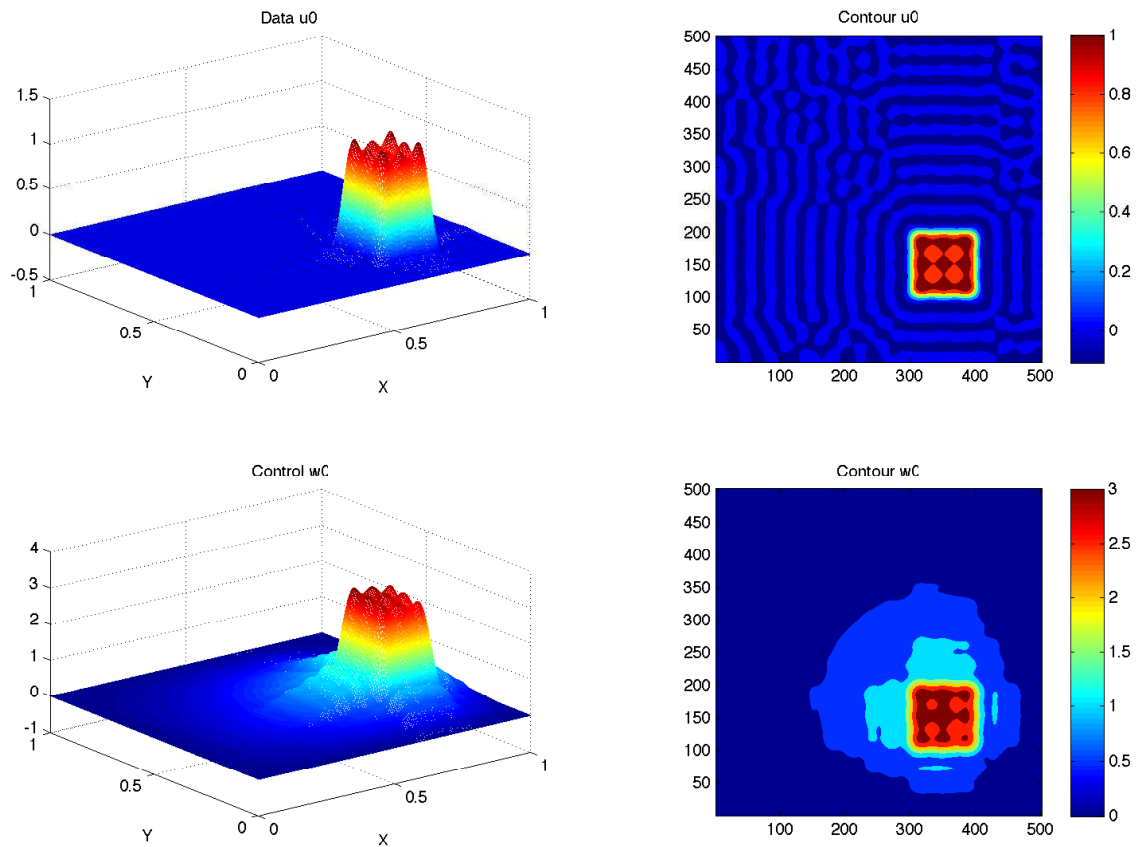


FIGURE 2.16 – Localisation en espace dans le carré, avec lissage. Le contrôle w_0 est représenté en bas, tandis que la cible u_0 est en haut. Les vues 3D sont à gauche, les contours sont à droite.

Effet du lissage

Nous avons implémenté l'algorithme pour plusieurs domaines 2D. On présente ici uniquement la géométrie carrée (on renvoie au papier [4] pour d'autres exemples). Pour chaque géométrie, on a choisi un domaine de contrôle U standard satisfaisant la condition de contrôle géométrique. La figure 2.13 montre la géométrie (en vert) et le domaine de contrôle (en marron). Comme il a été prouvé par Dehman and Lebeau (2009) que l'opérateur Λ a de bonnes propriétés quand la fonction de contrôle $\chi(t, x)$ est lisse, on a considéré deux cas : contrôle non lisse : $\chi(t, x) = 1_{[0, T]} 1_U$; contrôle lisse $\chi(t, x) = \psi(t) \chi_0(x)$ avec $\psi(t) = \frac{4t(T-t)}{T^2} 1_{[0, T]}$ et $\chi_0(x)$ lissé de manière similaire. La figure 2.13 montre (en bas) les domaines de contrôle avec lissage.

Au sujet du lissage, la figure 2.14 montre les coefficients de la matrice M_T avec (à gauche) et sans (à droite) lissage. La même échelle de couleur a été utilisée, on voit que la décroissance des coefficients est bien meilleure avec que sans lissage.

Localisation en fréquence

Le premier résultat que nous avons illustré est le suivant (voir Dehman and Lebeau (2009); Lebeau (1992) pour les détails). Soient $\psi_k(D)$, $k \in \mathbb{N}$ les opérateurs de localisation spectrale associés à la décomposition de Littlewood-Paley :

$$\psi_k(D) \left(\sum_j a_j e_j \right) = \sum_j \psi_k(\omega_j) a_j e_j, \quad S_k(D) = \sum_{j=0}^k \psi_j(D), \quad k \geq 0$$

Supposons que la condition de contrôle géométrique est validée, et que le contrôle $\chi(t, x)$ est lisse. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \|\psi_k(D) \Lambda - \Lambda \psi_k(D)\|_H &\leq C 2^{-k} \\ \|S_k(D) \Lambda - \Lambda S_k(D)\|_H &\leq C 2^{-k} \end{aligned}$$

La figure 2.15 illustre ce résultat : la cible $f = (u_0, u_1)$ est telle que $u_0 = e_{50}$ (50ème vecteur propre) et $u_1 = 0$. On voit alors que le contrôle (w_0, w_1) est quasiment égal à ce vecteur propre, et que ceci est d'autant plus vrai que la fonction de contrôle est lisse.

Localisation en espace

Pour la localisation en espace, on n'a pas de résultats théoriques. Cependant, la figure 2.16 est un exemple dans lequel le support du contrôle w_0 est identique à celui de la cible u_0 . On a d'autres exemples, avec et sans lissage, dans d'autres géométrie et avec d'autres cibles (voir [4]) qui peuvent laisser penser que l'opérateur M_T pourrait être un opérateur microlocal, ce qui signifierait effectivement qu'il préserve la localisation en espace tout comme la localisation en fréquence.

2.5 Bibliographie du chapitre 2

- M. Asch and G. Lebeau. Geometrical aspects of exact boundary controllability of the wave equation. a numerical study. *ESAIM :COCV*, 3 :163–212, 1998.
- D. Auroux. *Étude de différentes méthodes d'assimilation de données pour l'environnement*. PhD thesis, Université de Nice, 2003.
- D. Auroux and J. Blum. Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 340 :873–878, 2005.
- D. Auroux and J. Blum. A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems : the back and forth nudging (bfm) algorithm. *Nonlin. Proc. Geophys.*, 15 : 305–319, 2008.
- Didier Auroux. Algorithmes rapides pour le traitement d'images et l'assimilation de données. *Mémoire de l'Habilitation à Diriger la Recherche, Université de Toulouse*, 3, 2008.
- Didier Auroux. The back and forth nudging algorithm applied to a shallow water model, comparison and hybridization with the 4D-VAR. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61(8) :911–929, November 2009.
- Didier Auroux, Patrick Bansart, and Jacques Blum. An evolution of the back and forth nudging for geophysical data assimilation : application to Burgers equation and comparisons. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 21(3) :399–419, April 2013.
- C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilisation of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 305 : 1024–1065, 1992.
- E. Blayo, J. Verron, and J. M. Molines. Assimilation of TOPEX/POSEIDON altimeter data into a circulation model of the North Atlantic. *Journal of Geophysical Research*, 99 :24691–24706, December 1994. doi : 10.1029/94JC01644.
- A. Buffa, Y. Maday, A.T. Patera, C. Prud'homme, and G. Turinici. A priori convergence of the greedy algorithm for the parametrized reduced basis. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2009.
- T. Bui-Thanh, K. Willcox, O. Ghattas, and B. van Bloemen Waanders. Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :880–896, 2007.
- Y. Chen, J.S. Hesthaven, Y. Maday, and J. Rodríguez. Improved successive constraint method based a posteriori error estimate for reduced basis approximation of 2d maxwell's problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(06) :1099–1116, 2009.
- Nguyen Ngoc Cuong, Karen Veroy, and Anthony T Patera. Certified real-time solution of parametrized partial differential equations. In *Handbook of Materials Modeling*, pages 1529–1564. Springer, 2005.

- B. Dehman and G. Lebeau. Analysis of the HUM Control Operator and Exact Controllability for Semilinear Waves in Uniform Time. *SIAM J. Control Optim.*, 2009. in press.
- Bradley Efron. Bootstrap methods : another look at the jackknife. *The annals of Statistics*, pages 1–26, 1979.
- R.G. Ghanem and P.D. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Dover Pubns, 2003.
- R. Glowinski, C.H. Li, and J.L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). dirichlet controls : description of the numerical methods. *Japan J. Appl. Math.*, 7 :1–76, 1990.
- Roland Glowinski, Jacques-Louis Lions, and Jiwen He. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, volume 117 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. ISBN 978-0-521-88572-0. A numerical approach.
- M.A. Grepl and A.T. Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1) :157–181, 2005.
- Martin A Grepl, Yvon Maday, Ngoc C Nguyen, and Anthony T Patera. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(03) :575–605, 2007.
- B. Haasdonk and M. Ohlberger. Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(2) :277–302, 2008. ISSN 0764-583X.
- J. Hoke and R. A. Anthes. The initialization of numerical models by a dynamic initialization technique. *Month. Weather Rev.*, 104 :1551–1556, 1976.
- E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3(3) :201–230, 1950.
- D.B.P. Huynh, G. Rozza, S. Sen, and A.T. Patera. A successive constraint linear optimization method for lower bounds of parametric coercivity and inf-sup stability constants. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(8) :473–478, 2007a.
- D.B.P. Huynh, G. Rozza, S. Sen, and A.T. Patera. A successive constraint linear optimization method for lower bounds of parametric coercivity and inf-sup stability constants. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(8) :473–478, 2007b.
- T. Ishigami and T. Homma. An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models. In *First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis Proceedings, 1990.*, pages 398–403. IEEE, 1990.
- Alexandre Janon. *Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- D.J. Knezevic, N.C. Nguyen, and A.T. Patera. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for the parametrized unsteady boussinesq equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2010.

- G. Lebeau. Contrôle analytique I : Estimations a priori. *Duke Math. J.*, 68(1) :1–30, 1992.
- J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, volume 9 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988. ISBN 2-225-81474-0.
- A. Marrel, B. Iooss, B. Laurent, and O. Roustant. Calculations of sobol indices for the gaussian process metamodel. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(3) :742–751, 2009.
- N.C. Nguyen, K. Veroy, and A.T. Patera. Certified real-time solution of parametrized partial differential equations. *Handbook of Materials Modeling*, pages 1523–1558, 2005.
- N.C. Nguyen, G. Rozza, and A.T. Patera. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for the time-dependent viscous Burgers equation. *Calcolo*, 46(3) :157–185, 2009.
- C Prud’homme and Anthony T Patera. Reduced-basis output bounds for approximately parametrized elliptic coercive partial differential equations. *Computing and Visualization in Science*, 6(2-3) :147–162, 2004.
- Christophe Prud’homme, Dimitrios V Rovas, Karen Veroy, and Anthony T Patera. A Mathematical and Computational Framework for Reliable Real-Time Solution of Parametrized Partial Differential Equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(05) :747–771, October 2002.
- G. Rozza and Patera A.T. Venturi : Potential flow. <http://augustine.mit.edu/workedproblems/rbMIT/venturi/>, 2008.
- I. M. Sobol. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Math. Modeling Comput. Experiment*, 1(4) :407–414 (1995), 1993. ISSN 1061-7590.
- I.M. Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1-3) :271–280, 2001.
- C.B. Storlie, L.P. Swiler, J.C. Helton, and C.J. Sallaberry. Implementation and evaluation of nonparametric regression procedures for sensitivity analysis of computationally demanding models. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(11) :1735–1763, 2009.
- J.Y. Tissot. *Sur la décomposition ANOVA et l’estimation des indices de Sobol’*. Application à un modèle d’écosystème marin. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- K. Urban and A.T. Patera. A new error bound for reduced basis approximation of parabolic partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 2012.
- A. W. van der Vaart. *Asymptotic statistics*, volume 3 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. ISBN 0-521-49603-9 ; 0-521-78450-6.
- K. Veroy and A.T. Patera. Certified real-time solution of the parametrized steady incompressible Navier-Stokes equations : Rigorous reduced-basis a posteriori error bounds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(8-9) :773–788, 2005.

- Karen Veroy, Christophe Prud'homme, D V Rovas, and Anthony T Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximation of parametrized noncoercive and nonlinear elliptic partial differential equations. In *Proceedings of the 16th AIAA computational fluid dynamics conference*, 2003.
- J. Verron and W. R. Holland. Impacts de données d'altimétrie satellitaire sur les simulations numériques des circulations générales océanique aux latitudes moyennes. *Annales Geophysicae*, 7(1) :31–46, 1989.
- E. Zuazua. Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8(2) :469–513, 2002.
- E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Rev*, 47(2) :197–243, 2005.

Perspectives

Perspectives à court-terme

Chacune de mes directions de recherche actuelles présente de manière immédiate des perspectives à court terme, qui consistent à poursuivre, approfondir ou améliorer l'existant, je les énumère rapidement ci-dessous.

- Glaciologie petite échelle (code Elmer/Ice) :
 - améliorer le gradient approché,
 - améliorer les algorithmes,
 - ajouter le contrôle de la topographie du socle,
 - implémenter le BFN.
- Glaciologie grande échelle (code Winnie et GRISLI) :
 - ajouter plus de physique dans les équations de Winnie pour l'assimilation (Kalman et 4D-Var),
 - obtenir l'adjoint complet (4D-Var),
 - passer du prototype Winnie au modèle complet GRISLI,
 - implémenter le BFN.
- Données lagrangiennes : proposer une application à des données réelles (par exemple la Mer Noire).
- Séquences d'images : poursuivre l'étude des matrices de covariances d'erreur d'observation.
- Analyse de sensibilité et réduction de dimension : étudier un problème plus proche d'un écoulement géophysique réaliste, avec un modèle Shallow-Water.
- BFN :
 - améliorations de l'algorithme,
 - implémentation en glaciologie.
- HUM : application à un problème concret de contrôle non destructif ou d'imagerie (identifier un défaut ou une source).

Perspectives à moyen terme

Pour les perspectives à moyen terme, plusieurs directions me semblent particulièrement intéressantes à explorer.

Assimilation de séquences d'images. D'abord, du côté de l'assimilation d'images, nous aimerions étudier une nouvelle distance entre images, qui soit plus adaptée au suivi des structures. Nous pensons en particulier à une distance basée sur le transport optimal. La distance de Wasserstein entre deux images est le coût de transport d'une image sur une autre. Cette notion a été introduite par Monge, qui devait optimiser les trajets entre des zones de déblais (terre à évacuer) et des remblais (terre à ajouter), autrement dit trouver le trajet qui minimise le coût de transport. Le coût dépend ainsi de la masse transportée et de la distance sur laquelle on la transporte. La formule qui donne la distance de Wasserstein entre les images (vues comme des densités) ρ_0 et ρ_1 est la suivante :

$$W_2^2(\rho_0, \rho_1) = \inf_{M \text{ vérifie } (E)} \int |M(x) - x|^2 \rho_0(x) dx$$

où (E) est la contrainte non-linéaire suivante

$$(E) : \quad \det(\nabla M(x)) \rho_1(M(x)) = \rho_0(x)$$

(M est un champ de transport qui envoie ρ_0 sur ρ_1)

Cette notion de distance nous semble plus adapté à l'assimilation de données image. En effet, contrairement à la distance L^2 (où les images sont comparées pixel à pixel), cette distance tient compte de la distance entre les supports des structures (fronts, tourbillons, etc.). Comme cette distance ne dérive pas d'un produit scalaire, la théorie usuelle du contrôle optimal des EDP ne s'applique pas. On veut néanmoins faire de l'assimilation variationnelle en calculant la dérivée de cette distance par rapport aux images, afin de mettre en œuvre une méthode de gradient. Ce travail, à la fois théorique et numérique, est l'objet d'une thèse qui commencera au moins de novembre.

Glaciologie. On a vu précédemment le point suivant, bien connu des biologistes : dans certains cas particuliers (calottes simplifiées où on peut faire des calculs explicites), il est impossible d'assimiler conjointement le socle et le coefficient de frottement basal. En effet, dans une configuration idéalisée, un socle profond avec peu de glissement produit les mêmes observations (vitesses en surface) qu'un socle peu profond avec beaucoup de glissement. Dans ce cadre là, le problème n'est donc pas contrôlable. J'aimerais étudier dans le cas général (écoulement SIA flowline 1D) ce problème de contrôlabilité, au moins numériquement si la théorie n'est pas abordable.

Ensuite, on peut s'intéresser à la levée de cette non-contrôlabilité. Une solution que nous pourrions étudier est celle d'un couplage avec la géothermie au niveau du socle rocheux. Ceci donnerait une information de température qui permettrait de dire si la glace est au point de fusion ou pas. Dans ce cas, cela pourrait aider à faire le distinguo entre les zones où le glissement est fort, et celle où la glace est posée sans glisser.

Une autre possibilité, plus complexe sans doute d'un point de vue théorique, est d'étudier le modèle couplé thermomécanique, où l'on résout également une équation pour la température dans la glace. Le modèle complet 3D GRISLI est basé sur ces équations couplées. De la même façon cela donnerait une information supplémentaire sur la nature de la glace au fond qui permettrait peut-être de rendre le problème contrôlable.

Ouverture vers la biologie et l'écologie

Enfin, je m'intéresse également à d'autres thématiques liées à l'environnement, notamment en lien avec la biologie et l'écologie.

Couplage fluide-vivant. Sur ce sujet, j'ai commencé à étudier avec A. Rousseau (MOISE) un problème de dépollution de lac, par assimilation de données variationnelle. Le problème est le suivant : on prélève de l'eau dans un lac, l'eau est envoyé dans un bio-réacteur. Dans le bioréacteur, des bactéries se chargent de consommer la pollution, ensuite ces bactéries sont décantées et l'eau "propre" retourne dans le lac, selon le dessin suivant ¹ :

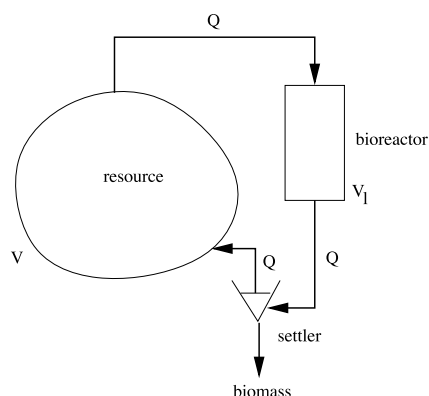


Fig. 1. Interconnection of the bioreactor with the resource.

La question est alors d'identifier le débit optimal des pompes qui tirent/rendent l'eau du lac. Ce problème a été étudié précédemment¹, dans un cadre un peu simplifié, où l'on suppose que la concentration en polluant dans le lac est régie par une équation différentielle ordinaire. Avec A. Rousseau on souhaite étudier le problème dans un cadre plus réaliste, où la circulation fluide dans le lac est prise en compte par une EDP (Navier-Stokes). Le modèle que l'on considère représente le couplage entre

- la circulation du fluide dans le lac (avec entrée/sortie d'eau dues aux pompes) ;
- le transport-diffusion du polluant par le fluide dans le lac ;
- la disparition du polluant dans le bioréacteur par l'action des bactéries ;
- l'évolution de la population de bactéries dans le bioréacteur.

Dans ce modèle intervient le paramètre inconnu : le débit de la pompe qui connecte le lac et le bioréacteur. On tente actuellement de mettre en œuvre une méthode adjointe pour trouver la valeur du paramètre qui maximise la dépollution au temps final.

Toujours du côté couplage fluide-vivant, on pourrait également utiliser les outils développés dans la thèse d'A. Janon pour étudier un problème couplé océan littoral – biologie marine. De tels modèles sont actuellement en attente de calibration, avec de nombreux paramètres inconnus. L'analyse de sensibilité permettrait d'identifier les paramètres sensibles, avant que l'on puisse procéder à leur identification optimale.

1. P. Gajardo, J. Harmand, H. Ramírez C., A. Rapaport, *Minimal time bioremediation of natural water resources*, Automatica, 2011

Ecologie. Je m'intéresse également à d'autres sujets en lien avec l'agriculture écologique :

- agroécologie : modélisation de la microbiologie du sol et son lien avec l'hydrologie et les plantes en surface ;
- agroforesterie : couplage arbres-agriculture-hydrologie-sol

avec comme objectifs de mieux protéger les cultures, d'améliorer la résistance aux ravageurs, de mieux comprendre les interactions entre les différents acteurs (plantes, minéraux, biomasse du sol, hydrologie, etc.). Dans ces domaines se posent des questions de modélisation, puis de calibration des modèles et enfin d'optimisation et d'assimilation de données, et je compte prochainement démarrer des collaborations sur ces sujets.